Der Einsatz von GeoGebra und die Auswirkungen auf den Erwerb von Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung in der Sekundarstufe 2 an allgemeinbildenden höheren Schulen

Masterarbeit

Zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Education (MEd)

im Studium Lehramt Sekundarstufe Allgemeinbildung

Eingereicht von

Sabrina Stimpfl, BEd

Matrikelnummer: 01615001

Graz, im April 2023

Studiengang: Lehramt Mathematik & Darstellende Geometrie

Betreuer: Prof. Mag. Dr. rer. nat. Karl-Heinz Graß

Abstract

The use of higher technology in math education has been made mandatory since the May 2018 central math exam in Austria. This has led to the integration of technological aids into the math curriculum, which offer several benefits, including the promotion of mathematical understanding through visualization. However, students may become overly reliant on technology and lose fundamental mathematical skills. The aim of this Master's thesis is to investigate whether the use of higher technological aids has an impact on the acquisition of fundamental mathematical concepts in differential calculus at Austrian high schools. The thesis will focus on the use of GeoGebra software in the development of learning paths to help students develop fundamental mathematical concepts. The thesis will explore the potential of the software to build sustainable fundamental mathematical concepts and deeper understanding of differential calculus among students. The use of learning paths may offer an opportunity to develop sustainable fundamental mathematical concepts in students. For this purpose, a learning path for differential calculus was developed, which aims to build basic concepts using GeoGebra. It was used in four experimental classes, and a quantitative comparative study will show to what extent the use of the learning path affects performance and the acquisition of basic concepts.

Danksagung

Zuerst gebührt mein Dank Herrn Prof. Mag. Dr. rer. nat. Karl-Heinz Graß, der meine Masterarbeit betreut und begutachtet hat. Für seine wertvollen Hilfestellungen und zahlreichen Anregungen und Kommentare bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Außerdem möchte ich mich bei allen Schüler:innen sowie den engagierten Lehrpersonen für die Teilnahme an meiner Studie bedanken. Ohne sie hätte diese Arbeit nicht entstehen können,

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die ausnahmslos an mich geglaubt und mich während des Studiums immer unterstützt haben und in allen meinen Entscheidungen hinter mir gestanden sind.

Schließlich möchte ich mich noch bei meinem Freund bedanken, der mich stets motiviert hat und mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden ist. Außerdem danke ich ihm aufrichtig für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Einleitung

1. Einleitung

1.1. Problemstellung

Beim Reifeprüfungstermin im Mai 2018 wurde erstmals der Einsatz höherer Technologie für die schriftliche Zentralmatura in Mathematik verpflichtend eingeführt (Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2019). Seit diesem Zeitpunkt ist es nun auch die Aufgabe der Lehrer:innen, den Schüler:innen höhere technische Hilfsmittel näherzubringen und im Mathematikunterricht zu integrieren, um so die Lernenden bestmöglich auf die Matura vorbereiten zu können.

Höhere technische Hilfsmittel bringen viele Vorteile mit sich, da durch Visualisierungen das mathematische Verständnis gefördert wird und Aufgaben besser verknüpft werden können. Gleichzeitig kann es aber passieren, dass sich die Heranwachsenden zu sehr auf die Technologie verlassen und so mathematisches Wissen und wichtige, grundlegende Fähigkeiten verloren gehen (Lindner, 2015, S. 16).

In weiterer Folge können Grundvorstellungen – darunter versteht man Vorstellungen von mathematischen Inhalten, die unverzichtbar für die Allgemeinbildung sowie für mathematisches Problemlösen und das Anwenden von Mathematik sind (Malle, o. J. a) – nicht aufgebaut werden, was zum sukzessiven Verlust mathematischer Kenntnisse führen kann (Lindner, 2015, S. 16).

Ziel dieser Masterarbeit ist es, herauszufinden, ob der Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln eine Auswirkung auf den Erwerb von Grundvorstellungen im Mathematikunterricht hat. Der Fokus liegt hierbei auf der Verwendung der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung in der Sekundarstufe 2 an allgemeinbildenden höheren Schulen. Hierfür wird ein Lernpfad für den Aufbau von Grundvorstellungen mittels GeoGebra entwickelt und im Unterricht eingesetzt. Letztendlich soll empirisch überprüft werden, ob durch die Verwendung des Lernpfades nachhaltigere Grundvorstellungen und ein tieferes Verständnis der Differentialrechnung bei den Schüler:innen aufgebaut werden konnten.

1.2. Forschungsstand und theoretische Grundlage

Als Basis für diese Masterarbeit dienen zahlreiche wissenschaftliche Studien, die den positiven Einfluss des Einsatzes höherer Technologie auf den Mathematikunterricht belegen (u. a.: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014). Durch die vielzähligen Funktionen elektronischer Hilfsmittel – dazu gehören die Visualisierungs-, Rechen-, Experimentier- und Modellierfunktion (Heugl, 2014, S. 9–13) – wirkt sich der Einsatz dieser Werkzeuge nicht nur positiv auf die Motivation der Schüler:innen aus, sondern auch auf deren Leistungen (u. a.: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014).

Werden technische Hilfsmittel jedoch unreflektiert im Mathematikunterricht eingesetzt, kann es passieren, dass sich die Lernenden zu sehr auf die Technologie verlassen und ihre mathematischen Fähigkeiten außen vor lassen, was zum Verlust von mathematischen Basiswissen und Rechenfertigkeiten führt (u. a.: Majerek, 2014, S. 52; Neumann, 2018, S. 18f.). Dies hat zur Folge, dass die Heranwachsenden zwar mathematische Konzepte, jedoch ohne adäquate Grundvorstellungen, entwickeln und sich dadurch mathematisches Unverständnis etabliert (Majerek, 2014, S. 51f.).

Lernpfade bieten hierbei eine Möglichkeit, nachhaltige Grundvorstellungen bei den Jugendlichen aufzubauen. Unter einem Lernpfad versteht man eine dynamische, computergestützte Lernumgebung, die besonderen Anforderungen genügt (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 6). Der Aufbau von Grundvorstellungen ist nämlich ein individueller Lernprozess, der auf eigenen Anschauungen, Vorstellungen und Verinnerlichungen beruht (Klinger, 2017, S. 33). So bieten Lernpfade eine optimale Lernumgebung, in der sich Schüler:innen handlungsorientiert, selbsttätig und eigenverantwortlich mit mathematischen Inhalten auseinandersetzen können und durch die regelmäßigen Aufforderungen zum Formulieren von Vermutungen, Experimentieren, Argumentieren, Reflektieren und Protokollieren der Ergebnisse, wird die eigenverantwortliche Auseinandersetzung mit dem Lernpfad, sowie der Erwerb tiefgreifender Grundvorstellungen gefördert (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 6ff.).

Im Internet sind bereits einige Lernpfade zum Thema Differentialrechnung und zum Aufbau von Grundvorstellungen in diesem Inhaltsbereich zu finden (u. a.: Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V. & Weigand H.-G., 2021; Jedtke & Hankeln, 2019; www.mathe-online.at/mathint.html). Ob durch den Einsatz dieser nun nachhaltigere

Grundvorstellungen als im herkömmlicheren Unterricht erzielt werden können, wurde bis jetzt noch nicht empirisch untersucht. Dies stellt in weiterer Folge den Kern dieser Masterarbeit dar. Als Grundlage für die Entwicklung des Lernpfades wird das Buch „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015) verwendet.

1.3. Zielsetzung und Erkenntnisinteresse

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit dem Einsatz des Computerprogramms GeoGebra und dessen Einfluss auf den Erwerb von Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung in der Sekundarstufe 2 an allgemeinbildenden höheren Schulen. Beginnend damit, welche Grundvorstellungen es im Bereich der Differentialrechnung gibt, werden in weiterer Folge die dynamische Geometriesoftware GeoGebra vorgestellt, sowie die Vor- und Nachtteile, die dieses Computerprogramm mit sich bringt, dargelegt und letztendlich wird ein Lernpfad zum Inhaltsbereich Differentialrechnung erstellt und empirisch überprüft, ob dieser einen Einfluss auf den Aufbau entsprechender Grundvorstellungen hat.

Ziele der Arbeit:

- Vor- und Nachtteile des Einsatzes von GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung offen legen.
- Entwicklung eines Lernpfades zum Inhaltsbereich Differentialrechnung.
- Empirische Überprüfung, inwiefern sich die Verwendung von GeoGebra und des Lernpfades auf den Erwerb nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Schüler:innen auswirken.
- Im Zuge der Arbeit sollen folgende Forschungsfragen beantwortet werden:

1. *„Inwiefern beeinflusst der Einsatz von GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung den Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Schüler:innen?“*

2. *„Entwickeln die Schüler:innen durch den Einsatz des erstellten Lernpfades nachhaltigere Grundvorstellungen zur Differentialrechnung?“*

3. *„Inwiefern wirkt sich die Verwendung von GeoGebra und des Lernpfades auf die mathematischen Fertigkeiten der Schüler:innen aus?“*

Teil II: Theorie

2. Grundvorstellungen

Der Aufbau von Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung spielt eine wesentliche Rolle in dieser Masterarbeit. Greefrath (2016) definiert Grundvorstellungen wie folgt: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn ergibt.“

Für die Definition von Grundvorstellungen ist es jedoch notwendig, darüber Bescheid zu wissen, welche Voraussetzungen diese mit sich bringen. Deswegen werden im Folgenden zuerst die unterschiedlichen Arten von Wissen, sowie die der Aufbau von Begriffsverständnissen im Mathematikunterricht behandelt, um so zur Thematik der Grundvorstellungen zu gelangen.

Des Weiteren werden im Kapitel 2.2. die Grundvorstellungen zur Differentialrechnung behandelt, welche als Grundlage für die Entwicklung des Lernpfades dienen.

2.1. Was sind Grundvorstellungen?

2.1.1. Unterschied zwischen Wissen und Verstehen

Der Physiker Albert Einstein soll einmal gesagt haben: „Any fool can know. The point is to understand.“, was übersetzt bedeutet, dass es nicht ausreicht, bloßes Faktenwissen zu besitzen, sondern es darauf ankommt, wirklich zu verstehen. Einstein forderte also ein tiefgreifendes inhaltliches Verständnis anstelle von isoliertem und auswendig gelerntem Wissen. Genau das sollte auch das vorrangigste Ziel aller Lehrkräfte und Didaktiker:innen sein (Klinger, 2017, S. 13f.).

Um aber ein solches inhaltliches Verständnis zu erlangen, ist es notwendig, sich zuerst mit den unterschiedlichen Arten von Wissen zu beschäftigen.

2.1.2. Unterschiedliche Arten von Wissen

In der Literatur wird häufig zwischen verschiedenen Arten von Wissen unterschieden. Eine zentrale Unterscheidung ist die zwischen Faktenwissen und Handlungswissen. Faktenwissen bezieht sich vor allem auf die Kenntnis von Fakten und Zusammenhängen, was die Grundlage für ein abstraktes Tiefenverständnis darstellt. Dieses wird auch als „deklaratives“ oder „konzeptuelles Wissen“ bezeichnet. Im Gegensatz versteht man unter Handlungswissen die Fähigkeit, eine bestimmte Handlung auszuführen. Dies ist die Grundlage für Handlungskompetenz und wird oft als „prozedurales Wissen“ bezeichnet (Klinger, 2017, S. 13f.). Für den Aufbau von Grundvorstellungen werden sowohl „deklaratives“ und „prozedurales Wissen“ benötigt, da diese Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen ermöglichen (Roth, o. J., S. 48).

2.1.3. Begriffsverständnis und Vorstellungen

Mathematisches Wissen baut auf Begriffen und ihrer Bildung auf, wodurch diese eine wesentliche Rolle spielen. Das Verständnis von Mathematik ist eng mit dem Verständnis von Begriffen verbunden. Deswegen ist es wesentlich, sich mit den Stufen des Begriffsverständnisses zu beschäftigen, um verstehen zu können, wie Grundvorstellungen entstehen (Lechner, o. J., S. 10).

H.-J. Vollrath (1984) identifiziert fünf Stufen des Begriffsverständnisses: Die erste Stufe ist das intuitive Verständnis des Begriffs als Phänomen in der Umwelt und Mathematik, einschließlich seiner Wurzeln in der Umwelt der Schüler:innen. Als zweite Stufe versteht man das inhaltliche Verständnis des Begriffs als Träger von Eigenschaften und seine Anwendung bei der Lösung von Problemen. Die dritte Stufe ist das integrierte Verständnis des Begriffs als Teil eines Begriffsnetzes, inklusive der Erkennung von Zusammenhängen und Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Funktionstypen. In der vierten Stufe wird das formale Verständnis des Begriffs als formales Objekt erreicht, zusammen mit der Kenntnis verschiedener Definitionen und seiner Anwendung in Beweisen. Die fünfte und letzte Stufe ist das strukturelle Verständnis des Begriffs als strukturierbares Objekt, inklusive des Wissens über wichtige Verknüpfungen von Funktionen und ihrer Eigenschaften (Lechner, o. J., S. 10).

In der Mathematik sind Begriffe immer mit Vorstellungen verbunden, welche die Schüler:innen oder allgemein Mathematiker:innen haben. Es gibt keine Mathematik ohne Vorstellungen, da diese Vorstellungen das mathematische Denken beeinflussen (Lechner, o. J., S. 12). Diese Vorstellungen, die hinter mathematischen Begriffen stehen, sind für die Allgemeinbildung von so großer Bedeutung, dass sie als Grundvorstellungen bezeichnet werden. Diese müssen im Mathematikunterricht von den Lehrkräften vermittelt und von den Heranwachsenden erlernt werden (Malle, o. J., S. 1).

2.1.4. Definition von Grundvorstellungen

In der Literatur sind zahlreiche Definitionen zu Grundvorstellungen zu finden.

Günther Malle (o. J.) beispielsweise erklärt Grundvorstellungen wie folgt: „Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnet. Diese Grundvorstellungen sind nicht angeboren, sie müssen erlernt werden […].“

Vom Hofe (1995, S. 23) hingegeben beschreibt Grundvorstellungen so: „Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung.“

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Grundvorstellungen die Schnittstelle zwischen mathematischen Strukturen, individuellen psychologischen Prozessen und realen Sachverhalten sind (Klinger, 2017, S. 35).

2.1.5. Arten von Grundvorstellungen

In der Literatur werden zwei verschiedene Arten von Grundvorstellungen beschrieben (u. a.: vom Hofe, Blum & Pekrun, 2005; Hefendehl-Hebeker, vom Hofe, Büchter, Humenberger, Schulz & Wartha, 2019; Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2020): Zum einen beschreiben normative Grundvorstellungen beschreiben, was Personen im Allgemeinen und idealerweise unter einem mathematischen Begriff verstehen sollten. Diese Vorstellungen resultieren aus fachdidaktischen Analysen des Begriffs und das Erreichen dieser stellen ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts dar, weil sie dazu dienen können, den Prozess des Lernens und Lehrens zu strukturieren (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2021, S. 6). Kurz gesagt befasst sich der normative Aspekt mit der Frage, welche Grundvorstellungen angemessen sind, um ein Problem zu lösen (Klinger, 2017, S. 35).

Individuelle Grundvorstellungen zum anderen sind die tatsächlich vorhandenen Vorstellungen, die ein Individuum bezüglich eines mathematischen Begriffs hat. Diese resultieren aus subjektiven Lernprozessen und können von Person zu Person unterschiedlich sein (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2021, S. 6).

2.1.6. Aufbau von Grundvorstellungen

Grundvorstellungen sind für das mathematische Problemlösen und für das Anwenden von Mathematik unverzichtbar, wodurch es notwendig ist, dass die Schüler:innen im Mathematikunterricht tragfähige Grundvorstellungen erwerben (Lechner, o. J., S. 12f.). Um diese Vorstellungen zu erlernen, sollte der Unterricht im Fach Mathematik zweiphasig aufgebaut sein. In der ersten Phase werden die notwenigen Grundvorstellungen vermittelt und erst in der zweiten Phase werden die jeweiligen Kalkültechniken vermittelt. Die erste Phase wird aber leider oft vernachlässigt, was sich negativ auf das Verständnis der Lernenden auswirken kann (Malle, o. J. S. 1), weil ein falscher Aufbau von Grundvorstellungen zu Fehlvorstellungen führen kann, die dann wiederum das Verständnis der Begriffe beeinträchtigen. Deswegen ist es essentiell, dass Lehrpersonen für die Denkprozesse ihrer Lernenden sensibilisiert werden, um so Verständigungsprobleme zwischen Lehrkräften und Lernenden zu vermeiden, wodurch ein behutsamer Umgang mit Schüler:innenfehlern erreicht wird (Lechner, o. J., S. 12).

Der richtige Aufbau von Grundvorstellungen wird in drei Phasen durchlaufen, die vom Hofe (1995, S. 95f.) wie folgt beschreibt:

1. Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an eine bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen.
2. Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. Verinnerlichungen, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen.
3. Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.

Durch einen Unterricht, der die obigen Phasen durchläuft und auf den Grundvorstellungen der mathematischen Inhalte basiert, kann es also gelingen, dass sich die Heranwachsenden diese Vorstellungen als Teil ihres eigenen individuellen Denkens aneignen (Klinger, 2017, S. 35).

Der Aufbau von Grundvorstellungen kann außerdem durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel, wie z. B. GeoGebra, unterstützt werden, da durch die Technologie Rechenoperationen erleichtert, die Begriffsbildung gefördert und Denkprozesse angeregt werden können. Findet im Mathematikunterricht jedoch eine Verlagerung von „Handkalkülkompetenzen" zu „Strategiekompetenzen" statt, muss noch stärker auf die Entwicklung von Grundvorstellungen geachtet werden, da diese die Bedeutung von mathematischen Inhalten tragen und diese erst anwendbar machen. Nur durch den Erwerb nachhaltiger Grundvorstellungen kann das Verstehen mathematischer Inhalte ermöglicht werden (Lechner, o. J., S. 12).

2.2. Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist ein wesentlicher Bereich der Analysis, welche ein dichtes Geflecht an Zusammenhängen enthält und das Potenzial hat, zu einem umfassenden Konzept ausgebildet zu werden, das auf Vorstellungen und Denkweisen basiert, welche das Verständnis von Warum-Fragen im Mathematikunterricht fördern (Klinger, 2017, S. 3f.). Die Autor:innen Tietze, Klika & Wolpers (1997, S. 122) bezeichnen als die wichtigste Aufgabe der Differentialrechnung „den Begriff der Ableitung einzuführen und den Zusammenhang zwischen Funktionen und ihrer Ableitung klarzumachen".

Der Ableitungsbegriff basiert auf unterschiedlichen Grundvorstellungen, die in diesem Unterkapitel dargelegt werden sollen. Zuerst müssen jedoch die Anforderungen erläutert werden, die wesentlich für das Verständnis der Differentialrechnung sind.

2.2.1. Voraussetzungen für die Differentialrechnung

Es ist essentiell, dass die Lernenden vor Einführung der Differentialrechnung bereits bestimmte Typen von Funktionen kennengelernt haben, sowie deren Darstellung und Eigenschaften bekannt sind (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 122). Bis zur 6. Klasse (10. Schulstufe) lernen die Schüler:innen Lineare Funktionen, Potenz-, Polynom-, Exponential-, Logarithmus-, und Winkelfunktionen kennen und die Jugendlichen sollten dazu in der Lage sein, diese Funktionen in Hinblick auf Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie und Periodizität zu untersuchen (RIS, 2023, 6. Klasse). Außerdem ist es notwendig, dass die Heranwachsenden einen sicheren Umgang mit Ungleichungen beherrschen, sowie dass gewisse topologische Kenntnisse (z. B. Umgebungsbegriff) gegeben sind (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 122).

Des Weiteren wäre es wünschenswert, dass die Lernenden vor der Einführung der Differentialrechnung bereits ein „Funktionales Denken“ entwickelt haben. Vollrath (1989, S. 5) versteht unter „Funktionalem Denken“: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“.

Um ein „Funktionales Denken“ erreichen zu können, müssen die Lernenden eine Grundvorstellung zu Funktionen entwickeln und diese verinnerlichen. Zu diesen Grundvorstellungen zählen drei Aspekte (Herget, 2013, S. 49):

1. Zuordnungsaspekt: Welche Größe einer anderen eindeutig zugeordnet wird.
2. Ko-Variationsaspekt: Wie sich eine Größe mit der Anderen verändert.
3. Funktion als Ganzes: Betrachten eines Zusammenhangs als Ganzes.

Kenntnisse des Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffs sind hingegen nicht unbedingt vor der Einführung der Differentialrechnung notwendig, da diese erst beim Behandeln des Ableitungsbegriffs erarbeitet und präzisiert werden können (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 122).

2.2.2. Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Spätestens zu dem Zeitpunkt, an dem die Differentialrechnung im Mathematikunterricht eingeführt wird, ist es jedoch notwendig, auch den Grenzwertbegriff zu behandeln, da die gesamte Differentialrechnung darauf aufbaut.

Es gibt drei verschiedene Grundvorstellungen zum Grenzwert, die von der Unterscheidung zwischen potentiell und aktual Unendlichem beeinflusst werden (Klinger, 2017, S. 110):

1. Annäherungsvorstellung: Ein Zahlenwert (z. B. von Folgengliedern) nähert sich einem festen Wert (Grenzwert) an.
2. Umgebungsvorstellung: Es wird von einem Grenzwert ausgegangen und ein Folgenglied innerhalb einer beliebig kleinen Umgebung gesucht, das alle folgenden Glieder innerhalb dieser Umgebung hält.

3. Objektvorstellung: Grenzwerte sind konkrete Objekte, die aus einer Folge heraus konstruiert oder definiert werden können.

Da jegliche Grundvorstellungen zur Differentialrechnung auf dem Gedanken des Infinitesimalen basieren, ist die Ausbildung des Grenzwertbegriffs im Mathematikunterricht von zentraler Bedeutung (Klinger, 2017, S. 114).

2.2.3. Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

Im Inhaltsbereich Differentialrechnung gibt es vier normative Grundvorstellungen, die Lernende im Mathematikunterricht zum Begriff der ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle entwickeln sollen. Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand (2021, S. 6) identifizieren diese Grundvorstellungen wie folgt:

1. Lokale Änderungsrate: Die Ableitung gibt die lokale Änderungsrate einer Größe an.
2. Tangentensteigung: Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an den Graphen an einer Stelle an.
3. Lokale Linearität: Der Graph einer Funktion ist lokal näherungsweise linear.
4. Verstärkungsfaktor: Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen Variable auf die abhängige Variable auswirken.

Die obigen Definitionen des Ableitungsbegriffs können in zwei Gruppen eingeteilt werden, die aber äquivalent sind: Eine Gruppe bezieht sich auf den Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, während die andere Gruppe die lokale lineare Approximierbarkeit als Kern hat. Diese beiden fachlichen Aspekte bilden die Grundlage für die unterschiedlichen Vorstellungen des Ableitungsbegriffs (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147). Das Netzwerk ist in Abbildung 1 veranschaulicht.

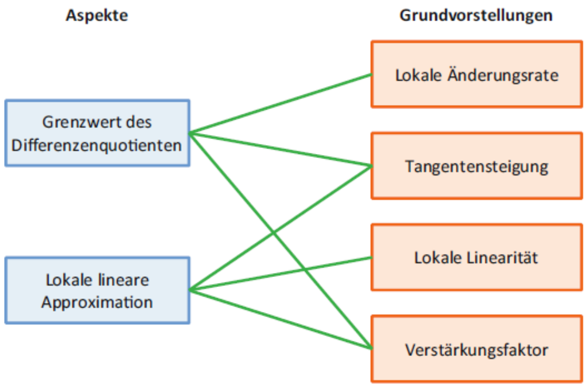


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Aspekten und Grundvorstellungen der Differentialrechnung

Im Folgenden werden die vier Grundvorstellungen zur Differentialrechnung noch einmal genauer erläutert.

2.2.3.1. Lokale Änderungsrate

Der Begriff der Änderungsrate basiert auf unterschiedlichen Erfahrungen mit der Beschreibung von Änderungsprozessen. In unterschiedliche Schulstufen kommen die Lernenden mit der absoluten, relativen und mittleren Änderung in Berührung. Letztere wird zum Beispiel bei der Berechnung von Durchschnittsgeschwindigkeiten oder bei der Bestimmung der Steigung einer Geraden mittels des Steigungsdreiecks verwendet. Das Verständnis der Ableitung als lokale Änderungsrate setzt das Verständnis der mittleren Änderungsrate voraus. Der Differenzenquotient bezieht sich nämlich immer auf ein Intervall und durch schrittweises Verkleinern des Intervalls gelangt man schließlich zum lokalen Änderungsverhalten, welches mit Hilfe des Grenzwertes bestimmt werden kann (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147f.).

Eine Möglichkeit, um den Schüler:innen den Ableitungsbegriffs basierend auf der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate näherzubringen, ist der Ansatz der Momentangeschwindigkeit. Die Lernenden können die Annäherung der Momentangeschwindigkeit durch durchschnittliche Geschwindigkeiten in beliebig kleinen Zeitintervallen aus dem Kontext heraus erkennen, wodurch der Grenzwertbegriff nicht so prominent in den Vordergrund rückt. Durch die Anknüpfung an die Erfahrungswelt der Heranwachsenden mittels des gegebenen Sachkontexts der Geschwindigkeit werden die Jugendlichen nicht daran zweifeln, dass der gefundene Wert der Momentangeschwindigkeit entspricht (Steinbauer & Stüss-Stepancik, 2019, S. 110ff.).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass zu einer umfassenden ausgeprägten Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate folgende Aspekte gehören (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 148):

- Die Vorstellung der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen.
- Die Vorstellung der Steigung einer Kurve in einem Punkt.
- Die Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.

2.2.3.2. Tangentensteigung

Die Idee hinter dieser Grundvorstellung, ist jene, dass die Steigung der Tangente an einem Punkt eines Funktionsgraphen durch die Ableitung bestimmt wird. Bereits in der Sekundarstufe I treten die Schüler:innen in Kontakt mit Tangenten an Kreisen, jedoch muss der Begriff der Tangente bei der Einführung der Differentialrechnung erweitert werden. Die Vorstellung der Tangente als Stützgerade, dass diese also den Graphen einer Kurve an nur einem Punkt berührt und die Kurve in keinem weiteren Punkt schneidet, muss in der Sekundarstufe II verworfen werden. Zeichnet man beispielsweise die Tangente an eine Polynomfunktion 3. Grades ein, kann es passieren, dass diese die Funktion in weiteren Punkten schneidet, wie es in Abbildung 2 veranschaulicht wird (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 149ff.).

Deswegen ist es notwendig, dass ein Paradigmenwechsel vom geometrischen zum analytischen Tangentenbegriff stattfindet. Hier wird die Tangente als Schmieggerade verstanden, die sich dem Verlauf des Funktionsgraphen anschmiegt und den Graphen beliebig oft berühren oder schneiden kann. Um nun entscheiden zu können, ob es sich bei einer Geraden um eine Tangente an einem Punkt der Kurve handelt, ist es notwendig, eine beliebig kleine Umgebung dieses Punktes zu betrachten (Steinbauer & Stüss-Stepancik, 2019, S. 106f.).

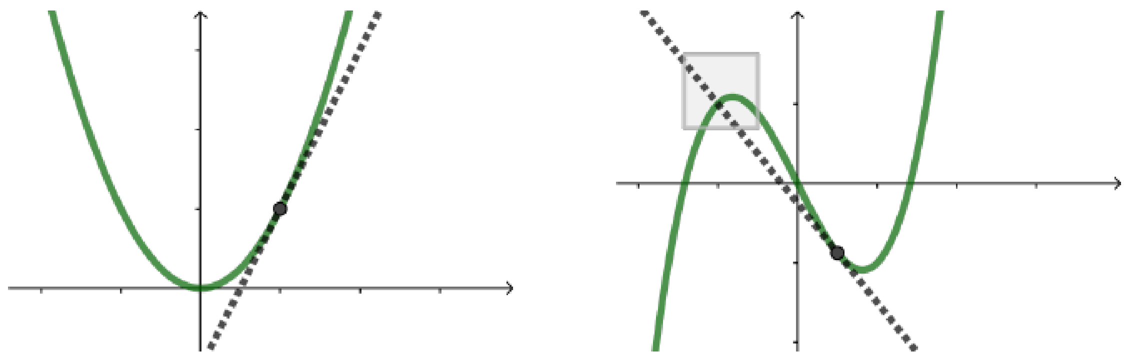


Abbildung 2: Tangente als Stützgerade (links) und Tangente als Schmieggerade (rechts)

In weiterer Folge wird nun die Tangente als Grenzwert von Sekanten aufgefasst und die Steigung der Tangente wird mittels des Differentialquotienten berechnet (Steinbauer & Stüss-Stepancik, 2019, S. 108ff.). An dieser Stelle eignet sich der Einsatz elektronischer Hilfsmittel besonders gut, da durch die Möglichkeit, Intervalle dynamisch mittels Schiebereglern sukzessive zu verkleinern, den Schüler:innen demonstriert werden kann, wie die Sekante in eine Tangente und in weiterer Folge der Differenzenquotient in den Differentialquotienten übergeht.

Die Tangentenvorstellung ist wichtig, um zum Beispiel Zusammenhänge zwischen dem Wert der Ableitung und der Monotonie einer Funktion verstehen zu können (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 150).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass zu einer ausgeprägten Grundvorstellung der Tangentensteigung folgende Aspekte gehören (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 150):

- Die Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden.
- Die Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt dieselbe Steigung wie die Kurve hat.
- Die Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt.

Durch eine genauere Analyse der Schmieggeraden und durch Heranzoomen an den Funktionsgraphen kann außerdem eine weitere wichtige Eigenschaft entdeckt werden: Je näher man an einen bestimmten Punkt heranzoomt, desto mehr nähert sich die Tangente dem Graphen der Funktion an, bis diese letztendlich nicht mehr unterscheidbar sind, was die

Grundlage der Vorstellung der lokalen Linearität bildet (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 150f.).

2.2.3.3. Lokale Linearität

Der Kern der Grundvorstellung der lokalen Linearität ist, dass die Ableitung angibt, wie sich kleine Veränderungen der unabhängigen Variablen auf die abhängige Größe auswirken. Somit gilt, dass eine Funktion, die in einer Umgebung lokal linear ist, die Ableitung an einer Stelle in dieser Umgebung konstant ist (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 151).

Die Grundvorstellung der lokalen Linearität kann man wie folgt zusammenfassen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 151):

- Die Vorstellung, dass man beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion nur ein geradliniges Kurvenstück sieht.
- Die Vorstellung, dass eine Funktion für kleine Änderungen der x-Werte so gut wie linear ist und lokal durch einen linearen Zusammenhang approximiert werden kann.

2.2.3.4. Verstärkungsfaktor

In der didaktischen Literatur wird der Verstärkungsfaktor nicht als Grundvorstellung angesehen, wodurch auf diese Vorstellung bei der Entwicklung des Lernpfades nicht berücksichtigt wurde.

Vollständigkeitshalber werden im Folgenden dennoch die Aspekte dargelegt, die umfassend für eine ausgeprägte Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors sind (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 153):

- Die Vorstellung, dass die Ableitung angibt, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.
- Die Vorstellung, dass hohe Werte der Ableitung bedeuten, dass sich die Funktionswerte schnell/stark ändern.
- Die Vorstellung, dass für kleine Änderungen der Zusammenhang Δx, Δy multiplikativ ist: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$.

2.2.4. Welche Grundvorstellung ist am besten geeignet?

Auf die Frage, welcher Ansatz am besten geeignet ist, um den zentralen Begriff der Ableitung zu vermitteln, gibt es keine eindeutige Antwort. Unter dem Gesichtspunkt der Verwendbarkeit in außermathematischen Situationen bietet sich die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate an. Stehen im Mathematikunterricht eher innermathematische Aspekte im Vordergrund, so eignen sich die Grundvorstellungen der Tangentensteigung bzw. lokalen Linearität. Um den Schüler:innen jedoch die Differentialrechnung nachhaltig zu vermitteln, ist es notwendig, dass die drei in der didaktischen Literatur vorkommenden Grundvorstellungen im Unterricht behandelt und bei den Lernenden aufgebaut werden (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 122f.).

2.2.5. Zusammenhang zwischen „Funktionalem Denken" und „Infinitesimalen Denken"

Die beiden Konzepte des „Funktionalen Denkens" und „Infinitesimalen Denkens" spielen in der Differentialrechnung eine wesentliche Rolle da „Funktionen" und „Grenzwerte" die Basis der Analysis bilden (Klinger, 2017, S. 116), weswegen dieses Unterkapitel den Zusammenhang dieser beiden Konzepte genauer betrachtet.

Wie bereits in Kapitel 2.1.1. dargelegt, ist das „Funktionale Denken" die Grundlage des Erwerbs der Grundvorstellungen zur Differentialrechnung. Diese Grundvorstellungen sind außerdem eng mit der Unendlichkeit und dem Grenzwertbegriff verbunden, wodurch auch an das „Infinitesimale Denken" angeknüpft wird. Konkret sind die Grundvorstellungen zur Differentialrechnung im „Funktionalem Denken" und „Infinitesimalem Denken" zu finden, jedoch stimmen diese nicht vollständig überein – sie befinden sich in der Nahtstelle zwischen den beiden Denkweisen. Dies ist in Abbildung 3 in einem Venn-Diagram veranschaulicht (Klinger, 2017, S. 116f.).

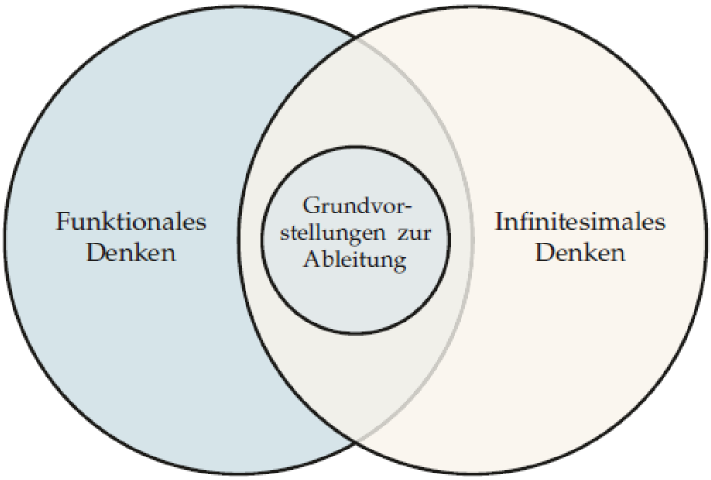


Abbildung 3: Zusammenhang zwischen "Funktionalem Denken", "Infinitesimalem Denken" und den Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

Eine weitere Beziehung zwischen „Funktionalem Denken“, „Infinitesimalem Denken“ und den Grundvorstellungen zur Differentialrechnung wäre auch, wie im Venn-Diagramm in Abbildung 4 dargestellt ist, denkbar. Diese Abbildung zeigt gut, dass die Analysis und insbesondere das Konzept der Differentialrechnung als „Höhepunkt“ oder „Krönung“ des „Funktionalen Denkens“ betrachtet werden kann. Bindet man die Definition des „Infinitesimalen Denkens“ stärker an das Grenzwertkonzept, wird der Zusammenhang zwischen dem „Funktionalen Denken“ und dem „Infinitesimalen Denken“ gestärkt (Klinger, 2017, S. 117ff.).

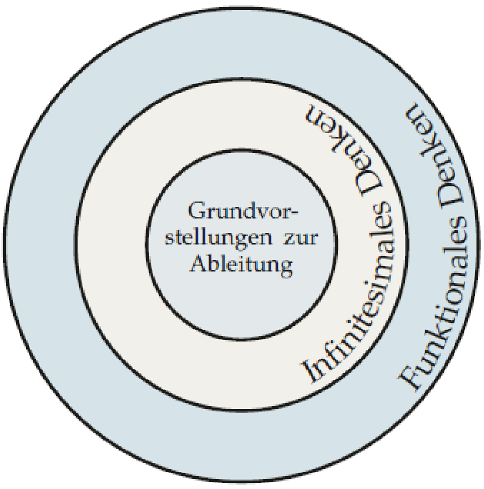


Abbildung 4: Zusammenhang zwischen "Funktionalem Denken", "Infinitesimalem Denken" und den Grundvorstellungen zur Differentialrechnung

3. Die dynamische Geometriesoftware GeoGebra

Der im Zuge dieser Masterarbeit entwickelte Lernpfad soll den Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung mittels des Computerprogramms GeoGebra beleuchten. Im Folgenden werden das Medium und seine Funktionen kurz vorgestellt.

GeoGebra ist eine kostenlose dynamische Geometriesoftware für nicht kommerzielle Zwecke, die nach dem „keep-it-short-and-simple"-Prinzip entwickelt wurde, um eine intuitive Bedienung ohne große Computerkenntnisse zu ermöglichen (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008, S. 138). Die Open-Source-Software wurde speziell für den Mathematikunterricht konzipiert und an dessen spezifische Anforderungen angepasst (Kaenders & Schmidt, 2011. S. 1).

Das Computerprogramm kombiniert die unterschiedlichen mathematischen Bereiche Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einer einfach zu bedienen Software. Ein Vorteil dieses Programms im Mathematikunterricht ist die dynamische Verbindung von Geometrie, Algebra und Tabellen (GeoGebra, 2023a). Kurz gesagt ist GeoGebra ein Multirepräsentationssystem, welches es ermöglicht, verschiedene Darstellungsmöglichkeiten simultan verfügbar zu machen und so den Lernenden die Chance gibt, mathematische Begriffe in unterschiedliche Manifestationen zu sehen (Rieß, 2018, S. 138ff.).

Solche dynamischen Mathematiksoftwares wie GeoGebra werden auch als kognitive Medien betrachtet, da es diese den Heranwachsenden erlauben, mathematische Modelle eigenständig zu erstellen, das System selbstständig zu steuern und aktiv damit zu arbeiten, was kreatives und entdeckendes Lernen unterstützt. Dadurch, dass das Grafik- und Algebra-Fenster miteinander gekoppelt sind, ermöglich es den Schüler:innen zwei verschiedenen Sichtweisen auf das mathematische Objekt, was die Visualisierung und Interaktion der verschiedenen Darstellungsformen erleichtert. Durch den Einsatz des Computerprogramms wird es Lernenden ermöglicht, mit allen drei Darstellungsformen – ikonisch, symbolisch und enaktiv – gleichzeitig zu arbeiten (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 175ff.). Das Zusammenspiel der unterschiedlichen Darstellungsformen wird in Abbildung 5 dargestellt.

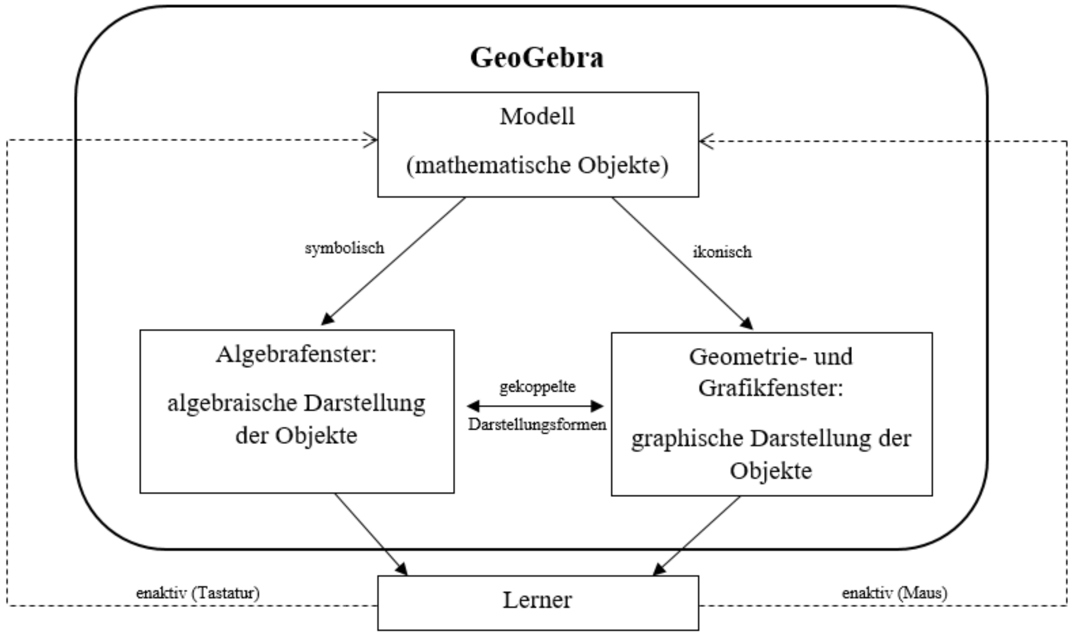


Abbildung 5: Verbindung der drei Darstellungsformen mittels GeoGebra

Durch die Verwendung von GeoGebra im Mathematikunterricht wird dieser also durch die unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten, die unkomplizierte Bedienung und die Vielzahl an verfügbaren Befehlen erheblich bereichert. Das Programm übernimmt viele rechnerische Aufgaben, wodurch die Schüler:innen im Unterricht die Möglichkeit haben, sich auf andere mathematische Fähigkeiten, wie beispielsweise die Planung von Lösungswegen oder die Interpretation von Ergebnissen in Bezug auf Sachverhalte, zu konzentrieren (Lindner, 2015, S. 16).

4. Vor- und Nachteile des Technologieeinsatzes

In der Literatur werden überwiegend positive Aspekte des Einsatzes von Technologie im Mathematikunterricht genannt. Dabei reichen die Vorteile von der aktiven Beteiligung der Schüler:innen bis hin zu Leistungssteigerung, die durch wissenschaftlichen Studien belegt werden (u. a.: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014). Jedoch sollte nicht außer Acht gelassen werden, dass auch Nachteile damit einhergehen können.

In den folgenden Abschnitten werden sowohl die Vorteile als auch die möglichen Nachteile des Technologieeinsatzes im Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II erläutert. Im letzten Unterkapitel wird zudem genauer auf die Pros und Contras der Verwendung elektronischer Hilfsmittel im Inhaltsbereich Differentialrechnung eingegangen sowie fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Einsatz von GeoGebra dargelegt.

4.1. Vorteile

Die Nutzung einer dynamischen Geometriesoftware bringt einige Vorteile mit sich. Zum einen werden durch die einfache Bedienung und Handhabung und die zahlreichen verfügbaren Werkzeuge, die eine reibungslose Anwendung ermöglichen, keine umfangreichen Computerkenntnisse der Nutzer:innen benötigt (Bayaga, Bossé & Williams, 2019, S. 34; Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008, S. 138). Zum anderen ist GeoGebra eine Open-Source-Software, die für nicht kommerzielle Zwecke frei verfügbar ist, sodass es jede Person kostenlos herunterladen kann. Außerdem ist das Programm in vielen Sprachen verfügbar und kann somit fast überall auf der Welt genutzt werden (GeoGebra, 2023a).

In der Schule werden Algebra und Geometrie oft getrennt unterrichtet, was dazu führen kann, dass die Lernenden Schwierigkeiten haben, den Zusammenhang zwischen algebraischen und graphischen Darstellungen mathematischer Objekte zu verstehen (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008, S. 137f.). Der Inhaltsbereich Analysis, insbesondere die Differentialrechnung, stellt jedoch eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra dar (Zulnaidi & Zamri, 2016, S. 2157f.), wodurch es wichtig ist, dass die Heranwachsenden dazu in der Lage sind, Beziehungen zwischen den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten herzustellen. Die Mathematiksoftware GeoGebra kann hierbei im Analysisunterricht helfen, indem sie durch die Verwendung verschiedener Fenster und Visualisierungen Geometrie und Algebra miteinander verbindet. Auf diese Weise können die Schüler:innen den Zusammenhang zwischen geometrischen Aspekten und ihren algebraischen Darstellungen erkennen und eine Verbindung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen herstellen (Edwards & Jones, 2006, S. 28; Övez, 2018, S. 3).

GeoGebra ermöglicht nicht nur die Darstellung von mathematischen Objekten in verschiedenen Fenstern, sondern verbindet diese auch miteinander. Wenn die Funktionsgleichung im Algebrafenster verändert wird, wird der dazugehörige Funktionsverlauf im Grafikfenster entsprechend angepasst. Dadurch können die Heranwachsenden mathematische Objekte aus verschiedenen Perspektiven betrachten und Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Darstellungsformen leichter erkennen. Dies trägt dazu bei, ein tieferes Verständnis der Mathematik zu erlangen (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1; Majerek, 2014, S. 52).

Ein weiterer Vorteil des Computerprogramms ist seine dynamische Natur. Mittels Schiebereglern können Parameter verändert werden, wodurch die Schüler:innen die Auswirkungen auf den Funktionsverlauf im Geometriefenster und gleichzeitig auf die Funktionsgleichung im Algebrafenster beobachten können. Diese simultane Möglichkeit fördert das Vorstellungsvermögen der Heranwachsenden und unterstützt das entdeckende Lernen und Experimentieren, was wiederum zu einem größeren mathematischen Verständnis und zum Erwerb neues Wissens führt (Bayaga, Bossé & Williams, 2019, S. 37). Darüber hinaus ermöglicht der Einsatz von GeoGebra entdeckendes Lernen, da die Lernenden ihre eigenen Ideen und Vorstellungen visualisieren und dynamisch verändern können (Vasquez, 2015, S. 10). Durch die Möglichkeit, mathematische Inhalte eigenständig zu erkunden, wird der Lernprozess gefördert (Neumann, 2018, S. 17f.). Das entdeckende Lernen ist zudem eine Chance, den Mathematikunterricht aktiv zu gestalten, was sich von den traditionellen Methoden unterscheidet, bei denen die Lehrperson den Inhalt an der Tafel präsentiert und die Schüler:innen passiv lernen. Durch den Einsatz technischer Hilfsmittel nehmen die Lernenden eine aktive Rolle im Unterricht ein, indem sie mit mathematischen Inhalten interagieren (Mudaly & Fletcher, 2019, S. 63).

Außerdem kann der Computer die Rechenarbeit übernehmen, wodurch im Unterricht komplexere und anwendungsorientiertere Aufgaben gelöst werden können. Der Fokus verschiebt sich dann von den Rechenkompetenzen auf andere Kompetenzen, wie z. B. die Interpretation der Ergebnisse im gegebenen Sachkontext (Neumann, 2018, S. 18; Lindner, 2015, S. 16).

Des Weiteren haben Studien gezeigt, dass der Einsatz von GeoGebra im Unterricht dazu beitragen kann, das Interesse und die Motivation der Lernenden für das Fach Mathematik zu erhöhen. Infolgedessen können sich ihre Leistungen verbessern (u. a.: Emaikwu & Abari, 2015, S. 20; Gómez-Chacón & Joglar Prieto, 2010, S. 503; Weinhandl, Hohenwarter, Schallert & Lavicza, 2020, S. 3). Dieser positive Effekt des Technologieeinsatzes auf die Schüler:innen ist möglicherweise der größte Pluspunkt des Einsatzes von GeoGebra im Mathematikunterricht.

Abschließend lassen sich die Vorteile der Verwendung einer dynamischen Geometriesoftware unter vier wesentlichen Funktionen zusammenfassen (Heugl, 2014, S. 9ff.):

- Rechenfunktion:
  Komplexe Rechenoperationen können auf den Computer ausgelagert werden.
- Visualisierungsfunktion:
  Simultane Visualisierungen unterschiedlicher Darstellungen.
- Experimentierfunktion:
  Unterstützung der experimentellen Phase des Lernens.
- Modellierungsfunktion:
  Integration von praxisnahen Aufgaben im Mathematikunterricht, die ohne Technologie nicht denkbar gewesen wäre.

4.2. Nachteile

Trotz der zahlreichen Vorzüge des Einsatzes von Technologie im Unterricht gibt es auch einige Nachteile, die berücksichtigt werden müssen.

Bevor technische Hilfsmittel erfolgreich in den Unterricht integriert werden können, müssen ausreichen Computer, sowie die Software zur Verfügung stehen (Horzum & Ünlü, 2017, S. 77). Die Beschaffung der GeoGebra-Software stellt kein Problem dar, da diese für nicht-kommerzielle Zwecke kostenlos heruntergeladen werden kann (GeoGebra, 2023a). Schwierigkeiten können jedoch bei der Verfügbarkeit von Computern auftreten, da sicher nicht alle Lernenden einen eigenen Laptop besitzen und nicht alle Schulen ausreichend viele Computerräume haben. Wenn GeoGebra regelmäßig im Unterricht eingesetzt werden soll, müssen daher genügend Laptops oder PCs sowie Räumlichkeiten vorhanden sein. Es ist auch wichtig, Alternativprogramme für den Fall von Stromausfällen oder anderen Komplikationen zu haben. Lehrkräfte müssen daher jede Unterrichtseinheit sorgfältig planen und vorbereiten (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8).

Des Weiteren ist zu beachten, dass der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht eine Veränderung der Lehrer:innen-Schüler:innen-Rolle mit sich bringt: Lehrpersonen müssen sich bewusst sein, dass sie ein passive, begleitende Rolle einnehmen, während die Lernenden selbstständig Inhalte entdecken und ihr eigenes Wissen aufbauen (Gómez-Chacón & Joglar Prieto, 2010, S. 486).

Außerdem ist es wichtig, den Einsatz von Technologie sorgfältig abzuwägen, da eine falsche Verwendung dazu führen kann, dass die Heranwachsenden ihre mathematischen Fähigkeiten vernachlässigen und sich zu sehr auf die Technologie verlassen und in weiterer Folge können algebraischen Fähigkeiten dadurch beeinträchtigt werden (Neumann, 2018, S. 18f.). Daher sollten die Lehrer:innen bewusst entscheiden, wann und wie technische Hilfsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt werden (Vasquez, 2015, S. 7f.).

Ein weiteres Problem heutzutage liegt in der digitalen Welt der Jugendlichen durch den ständigen Zugang zu sozialen Netzwerken, die viele Falschinformationen verbreiten. Oft ist es schwierig, zwischen Fakten und Falschmeldungen zu unterscheiden und insbesondere junge Menschen neigen dazu, alles im Internet zu glauben, ohne es kritisch zu hinterfragen. Dies kann dazu führen, dass Schüler:innen auch in der Schule Inhalte akzeptieren, ohne sie zu reflektieren. Beispielsweise können sie Funktionsverläufe mit GeoGebra betrachten, ohne aktiv darüber nachzudenken, was wiederum zu mathematischem Unverständnis führen kann, da sie mathematische Konzepte ohne angemessene Vorstellungen entwickeln (Majerek, 2014, S. 51f.).

Abschließend ist noch zu beachten, dass die Heranwachsenden nicht durch manipulative oder irreführende Darstellungen (z. B. falscher Maßstab) in ihrer Denkweise beeinflusst werden. Insbesondere im Inhaltsbereich Analysis können solche Visualisierungen zu Fehlvorstellungen führen. Es ist daher wichtig, dass Jugendliche nicht alles glauben, was sie auf dem Bildschirm sehen, sondern kritisch hinterfragen und überlegen, ob es der

Wahrheit entspricht (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8). Ein Ziel des Mathematikunterrichts sollte deswegen auch die Entwicklung von mathematischer Medienkompetenz sein, indem Schüler:innen nicht nur lernen, wie man Technologie verwendet, sondern auch eine kritische Haltung gegenüber deren Ergebnissen entwickeln und diese niemals unreflektiert akzeptieren. Sie sollten geschult werden, mathematische Ergebnisse im Hinblick auf ihre Glaubwürdigkeit und ihren Kontext zu überprüfen (Neumann, 2018, S. 13f.).

4.3. Technologieeinsatz im Inhaltsbereich Differentialrechnung

4.3.1. Lehrplankompetenzen im Inhaltsbereich Differentialrechnung

In der 7. Klasse (11. Schulstufe) der Sekundarstufe II wird im Mathematikunterricht erstmals die Differentialrechnung eingeführt. Um die Schüler:innen schrittweise darauf vorzubereiten, wird zunächst der Differenzenquotient als Sekantensteigung eingeführt. Die Lernenden sollen durch sukzessives Verkleinern des Intervalls, in dem der Differenzenquotient betrachtet wird, allmählich zum Grenzfall geführt werden, indem die Sekante in eine Tangente übergeht. Auf diese Weise wird den Heranwachsenden der Übergang von der mittleren zur momentanen Änderung vermittelt und sie sollten in der Lage sein, den Differenzen- und Differentialquotienten zu definieren und in außermathematischen Bereichen zu interpretieren.

Zudem müssen die Lernenden den Begriff der Ableitungsfunktion und ihre Bedeutung verstehen. Außerdem sollten sie höhere Ableitungen und verschiedene Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen anwenden können, um die Ableitungen von Funktionen zu berechnen. Im zweiten Semester der 7. Klasse sollen die Jugendlichen die Ableitungsregeln für Exponential- und Logarithmusfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktionen sowie weitere Ableitungsregeln, wie z. B. die Kettenregel, kennenlernen und anwenden können.

Das Ziel der Differentialrechnung ist es, dass die Heranwachsenden in der Lage sind, Polynomfunktionen und deren Eigenschaften wie Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen mithilfe der Ableitungen zu beschreiben (RIS, 2023, 7. Klasse).

4.3.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz im Inhaltsbereich Differentialrechnung

Wie schon im Kapitel 2.2.3. ausgearbeitet, liegen der Differentialrechnung vier Grundvorstellungen zugrunde, wobei die Fachdidaktik sich auf drei grundlegende Vorstellungen (lokale Änderungsrate, Tangentensteigung und lokale Linearität) beschränkt. Durch den richtigen Einsatz elektronischer Hilfsmittel kann es gelingen, den Aufbau jener Grundvorstellungen bei den Schüler:innen zu erleichtern.

In der 7. Klasse sollten die Lernenden bereits mit dem Differenzenquotienten vertraut sein, welcher die mittlere Änderung in einem Intervall beschreibt. Durch sukzessives Verkleinern des Intervalls wird die lokale Änderungsrate, also die Änderung in einem Punkt, beschrieben. Dies kann grafisch durch die Überführung der Sekante in eine Tangente veranschaulicht werden (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 148ff.). Die Demonstration dieses Übergangs an der Tafel kann für Lehrpersonen aber zu einer Herausforderung werden, da das Einzeichnen zahlreicher Sekanten schnell unübersichtlich wird. GeoGebra kann hierbei als hilfreiches Tool eingesetzt werden, da die Heranwachsenden mithilfe von Schiebereglern spielerisch erkunden können, welche Auswirkungen die Veränderung der Intervallbreite auf die Sekantensteigung hat und wie die Sekante in eine Tangente übergeht. Dadurch gelingt es den Lernenden, eigenständig die Grundvorstellung der Differentialrechnung als lokale Änderungsrate aufzubauen.

Ein weiterer Nutzen von GeoGebra für die Schüler:innen besteht darin, dass die Software als "Funktionenlupe" verwendet werden kann. Wenn man an die Funktion heranzoomt, wird die Funktion im betrachteten Punkt von ihrer Tangente approximiert. Dies führt die Lernenden zu den anderen beiden Grundvorstellungen der Differentialrechnung: Tangentensteigung und lokale Linearität. Durch das selbstständige Entdecken mithilfe von GeoGebra wird den Jugendlichen die Visualisierung dieser Grundvorstellungen erleichtert und es ist somit einfacher, diese zu verstehen und zu verinnerlichen (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 68f.; Blum & Törner, 1983, S. 96f.).

Im Mathematikunterricht der 7. Klasse werden den Schüler:innen nicht nur graphische, sondern auch rechnerische Aspekte der Differentialrechnung vermittelt. Insbesondere werden sie mit den Ableitungsregeln und den Ableitungen von Polynomfunktionen vertraut gemacht, was im Lehrplan ausdrücklich gefordert wird (RIS, 2023, 7. Klasse). Allerdings kann der Einsatz von GeoGebra dazu führen, dass die Lernenden sich zu sehr auf die elektronischen Hilfsmittel verlassen und dadurch wichtige mathematische Fertigkeiten verlieren. Wenn sie einfach *Ableitung* in die Eingabezeile eintippen, um die Ableitung einer Funktion zu erhalten (GeoGebra, 2023b), ist es nicht unbedingt notwendig, sich mit den Ableitungsregeln auszukennen. Dies kann dazu führen, dass die algebraischen Fähigkeiten, die durch ständiges Üben und Wiederholen gestärkt werden müssen, geschwächt werden und die Heranwachsenden deswegen Schwierigkeiten haben, Lösungen richtig einzuordnen (Neumann, 2018, S. 18f.). Die Jugendlichen könnten verwirrt sein, wenn abgeleitete Ausdrücke, die der Computer weiter vereinfacht hat, so komplex sind, dass die Ableitungsregeln nicht mehr ersichtlich sind. In diesem Fall besteht das Risiko, dass die Ergebnisse unreflektiert übernommen werden, ohne dass sich die Schüler:innen mit den Ableitungsregeln auseinandersetzen (Neumann, 2018, S. 13f.).

Im Mathematikunterricht geht es außerdem darum, den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen zu untersuchen, insbesondere durch das grafische Ableiten und die Umkehrung, was nur gelingt, wenn kalkühlhafte Aspekte des Differenzierens und anschauliche Vorstellungen miteinander verknüpft werden. Das grafische Ableiten kann auch dazu beitragen, einen Überblick über die Verlaufseigenschaften der zu untersuchenden Funktionen zu erhalten. An dieser Stelle kann GeoGebra eingesetzt werden, um die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen zu demonstrieren und die Lernenden können so die Verbindungen selbstständig untersuchen, was zu einem eigenen Wissensaufbau führt (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 263).

Beim Untersuchen von Polynomfunktionen hinsichtlich Monotonie- und Krümmungsbereichen, Extremstellen, Wendepunkten und Sattelpunkten kann der Einsatz von Technologie zwar Zeit sparen, jedoch können wichtige mathematische Fähigkeiten verloren gehen, die auf dem Grundprinzip der Differentialrechnung beruhen, wenn die Kurvendiskussion ausschließlich mit Computern durchgeführt wird.

Damit Schüler:innen beispielsweise dazu in der Lage sind, eine Extremstelle manuell zu finden, müssen sie ein grundlegendes Verständnis entwickeln, das auf der notwendigen und hinreichenden Bedingung einer solchen Stelle basiert. Die hinreichende Bedingung besagt, dass eine Funktion bei einem Extremum ihr Monotonieverhalten ändert. Allerdings ist dies allein nicht ausreichend und es wird auch die notwendige Bedingung einer

Extremstelle benötigt: Die 1. Ableitung muss an dieser Stelle ihr Vorzeichen ändern und verschwinden, was bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine waagerechte Tangente besitzt. Zusätzlich muss auch die 2. Ableitung der Funktion an dieser Stelle ungleich Null sein, um sicherzugehen, dass es sich bei der gefundenen Stelle tatsächlich um eine Extremstelle handelt. Damit Heranwachsende verstehen, dass man beim Aufsuchen von Extremstellen die erste Ableitung einer Funktion gleich Null setzen muss, benötigen sie also ein adäquates mathematisches Wissen und eine angemessene Vorstellung der Differentialrechnung. Für das manuelle Auffinden von Wendepunkten benötigen Lernende ebenfalls Kenntnisse über hinreichende und notwendige Bedingungen (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 138ff.). Bei einer Kurvendiskussion, die händisch durchgeführt wird, werden die wesentlichen Punkte schrittweise mithilfe der Ableitungen bestimmt. Durch die Verwendung von digitalen Werkzeugen kann dieser Prozess durch das Klicken auf den passenden Befehl in weniger als einer Minute abgeschlossen werden (Neumann, 2018, S. 10). Obwohl dies im Unterricht Zeit spart, fehlt den Lernenden in diesem Fall das Wissen über die Differentialeigenschaften dieser Punkte sowie Fähigkeiten, welche die manuelle Berechnung erfordern würden. Eine vollständige Verlagerung des Mathematikunterrichts auf den Computer würde dazu führen, dass sich die Kurvendiskussion grundlegend verändert oder sogar überflüssig wird (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 42f.). Dennoch ist die Kurvendiskussion aus theoretischen Gründen im modernen Mathematikunterricht bedeutsam, da sie das Mittel ist, um Funktionseigenschaften mathematisch zu beweisen und den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion zu entdecken (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 192). Dieses Wissen ist essentiell, um im Umgang mit Funktionen ein funktionales Denken zu entwickeln und Grundvorstellungen zur Differentialrechnung aufzubauen.

5. Lernpfade

Seitdem im Mai 2018 der Einsatz höher technischer Hilfsmittel bei der Reifeprüfung in Mathematik verpflichtend wurde, ist die Technologie nicht mehr aus dem Unterricht wegzudenken (Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2019). Beginnend mit diesem Zeitpunkt ist es nun die Aufgabe der Lehrpersonen, digitale Medien gezielt im Unterricht einzusetzen, um so die Schüler:innen gezielt auf die Matura vorzubereiten.

Obwohl der Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht viele Vorteile mit sich bringt, dürfen die Nachteile nicht außer Acht gelassen werden (siehe Kapitel 4). Deswegen ist es wichtig, dass digitale Medien fachdidaktisch reflektiert, insbesondere unter Berücksichtigung der Fähigkeiten der Lernenden zur eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten, im Unterricht integriert werden, sodass die Jugendlichen nachhaltige Grundvorstellungen aufbauen können (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 3).

Auf dem Weg zu einem fortschrittlicheren Unterricht ist es von großer Bedeutung Lernpfade einzubeziehen. Für viele mathematische Themen sind sie eine ideale Lernmethode, da Lernpfade sowohl eigenständiges Lernen als auch die Verbindung verschiedener Darstellungsformen ermöglichen (Schmidt, 2009, S. 1).

Nachfolgend werden Lernpfade und deren sinnvoller Einsatz im Mathematikunterricht erläutert. Anschließend wird der im Zuge dieser Masterarbeit erarbeitete Lernpfad für die Einführung der Differentialrechnung vorgestellt und begründet.

5.1. Lernpfade im Mathematikunterricht

5.1.1. Definition Lernpfad

Ein Lernpfad ist ein onlinebasiertes Lernsystem, das eine strukturierte Abfolge von Arbeitsaufträgen anbietet. Diese Arbeitsaufträge sind aufeinander abgestimmt und bieten interaktive Materialien, wie beispielsweise Applets, auf denen Lernende zielorientiert, eigenständig und aktiv arbeiten können. Aufgrund der Bausteinstruktur der Arbeitsaufträge können die Schüler:innen geeignete Aufgaben für ihren aktuellen Leistungsstand auswählen. Die selbstständige Auseinandersetzung mit dem Lernpfad wird durch individuell abrufbare Hilfen, Ergebniskontrollen und regelmäßige Aufforderungen zum Formulieren von Vermutungen, Experimentieren, Argumentieren, Reflektieren und Protokollieren der Ergebnisse in den Arbeitsaufträgen explizit gefördert (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 8).

5.1.2. Der didaktische Mehrwert von Lernpfaden

Der Einsatz eine Lernpfades im Mathematikunterricht bringt zahlreiche pädagogische Vorteile mit sich. Zum einen gibt es beim Arbeiten mit Lernpfaden eine hohe Schüler:innenaktivität und die Lernenden übernehmen automatisch selbst die Verantwortung für ihren Lernprozess. Zum anderen ist es für die Lehrperson sehr einfach, einen differenzierenden Unterricht anzubieten, da sich die Individualisierung in Bezug auf das Lerntempo praktisch selbst ergibt. Außerdem werden durch die unterschiedlichen Zugänge zu einem Thema verschiedene Lerntypen angesprochen, wodurch eine Differenzierung leicht zu realisieren ist. Des Weiteren ermöglichen die in einem Lernpfad verfügbaren Materialien Visualisierungen und die Verknüpfung unterschiedlicher Darstellungsmöglichkeiten, wodurch die Heranwachsenden dazu angehalten werden, zu entdecken, experimentieren, argumentieren und begründen. Durch die strukturierte Aufarbeitung eines Themas in einem Lernpfad wird zudem ein besseres mathematisches Verständnis bei den Schüler:innen erreicht (Schmidt, 2009, S. 2f.).

Zusammenfassend wurden Lernpfade aus drei Gründen entwickelt (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 9):

1. Als Unterstützung der Lernenden, digitale Werkzeuge selbstständig im Mathematikunterricht zu nützen.
2. Zum Erreichen der Ziele des Mathematikunterrichts durch sinnvolle Nutzung digitaler Werkzeuge.
3. Um Probleme, die im Umgang mit Computerwerkzeugen im Unterricht auftreten können, einschließlich Handhabung, methodischer Unterrichtseinbindung und technisch-organisatorischer Verfügbarkeit zu lösen bzw. mildern.

5.1.3. Kriterienkatalog für einen guten Lernpfad

Der Kriterienkatalog für einen guten Lernpfad umfasst 6 Kategorien:

- Schüler:innenorientierung
- Schüler:innenaktivitäten
- fachliche Strukturierung
- Benutzer:innenfreundlichkeit
- zieladäquater Medieneinsatz
- Angebote für Lehrkräfte

Ein guter Lernpfad muss also schüler:innenorientiert sein und Schüler:innenaktivitäten beinhalten, die ihnen eine erfolgreiche selbstständige Bearbeitung ermöglichen. Außerdem müssen die Inhalte des Lernpfades fachlich korrekt und sinnvoll strukturiert sein und die Benutzer:innenfreundlichkeit sollte durch eine selbsterklärende Navigationsstruktur und technische sowie inhaltliche Hilfestellungen gewährleistet sein. Des Weiteren ist es notwendig, dass der Medieneinsatz zieladäquat ist und Interaktivitäten enthält. Zudem sollte ein guter Lernpfad auch ein Angebot für die Lehrkräfte umfassen, wie beispielsweise die Angabe der verfolgten inhaltlichen Ziele und der notwendigen Vorkenntnisse, ein Angebot für die Lernzielkontrolle sowie didaktische Hinweise für den Unterrichtseinsatz. Es ist jedoch unwahrscheinlich, dass ein Lernpfad alle diese Kriterien erfüllt (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 12ff.).

5.1.4. Der Einsatz von Lernpfaden im Unterricht

Es gibt viele Möglichkeiten, wie Lernpfade im Unterricht eingesetzt werden können. Sie können entweder als Einstieg in ein neues Thema, zur Förderung von selbstständigen Arbeiten oder als Teil offener Lernformen verwendet werden. Des Weiteren dienen Lernpfade auch zur Lernzielkontrolle, als abschließende Aufgabe zu einem Thema oder als optionales Zusatzangebot (Schmidt, 2009, S. 1).

Die Grundidee aller Lernpfade ist, dass Schüler:innen entdeckend Lernen. Bei dieser Lernform werden Fertigkeiten und Wissenselemente genutzt, um neue Entdeckungen zu machen. Gleichzeitig wird beim selbstständigen Erkunden ständig wiederholt und geübt. Da Lernpfade auf handlungsorientiertes, selbsttätiges, eigenverantwortliches und zielgerichtetes Arbeiten sowie Argumentation und Reflexion ausgerichtet sind, werden dabei in der Regel immer neue Entdeckungen gemacht oder bereits vorhandene Erkenntnisse vertieft (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20).

Die Verwendung eines Lernpfades im Mathematikunterricht erfordert jedoch eine sorgfältige Planung, um ein selbstständiges Arbeiten der Schüler:innen zu ermöglichen. Wird ein Lernpfad als Anreicherungskonzept eingesetzt, bedeutet das, dass dieser kurzfristig und ergänzend im Unterricht verwendet wird. Beim Integrationskonzept werden individuelle Lernpfadarbeit und Unterrichtsgespräche aufeinander abgestimmt. In beiden Fällen muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Heranwachsenden ihre Arbeitsergebnisse während der Arbeit am Lernpfad in geeigneter Weise festhalten, um eine fachadäquate Darstellungskompetenz zu entwickeln (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20f.).

Außerdem ist beim Einsatz eines Lernpfades zu beachten, dass die Möglichkeit, beim Computer unterschiedliche Darstellungsformen parallel zu verwenden, zwar als äußerst nützlich angesehen wird, jedoch reicht es nicht aus, die Lernenden einfach nur mit mehreren Repräsentationsformen gleichzeitig zu konfrontieren. Es ist notwendig, eine bewusste Verbindung zwischen ihnen herzustellen, wodurch es essentiell ist, dass in einen Lernpfad gezielt Aufgaben integriert werden, die auf die Verbindung verschiedener Darstellungsformen abzielen, denn die Verknüpfung von algebraischen Symbolen mit numerischen und graphischen Darstellungen erweist sich als besonders schwierig für Schüler:innen (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 146).

Abschließend stellt sich noch die Frage, wie Lehrkräfte Lernpfade am besten im Unterricht einsetzen können? Einerseits gibt es die Möglichkeit, vorhandene Lernpfade für den Unterricht zu nutzen. Andererseits können Lehrpersonen vorhandene Lernpfade anpassen oder sogar ihre eigenen Lernpfade erstellen. Wichtig wäre es, dass Lernpfade nicht nur für den eigenen Unterricht verwendet, sondern diese auch veröffentlicht werden, sodass auch andere Lehrer:innen die Möglichkeit haben, auf die Lernpfade zuzugreifen, denn nur so kann sich der in Abbildung 6 dargestellte Kreislauf schließen (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 21f.).

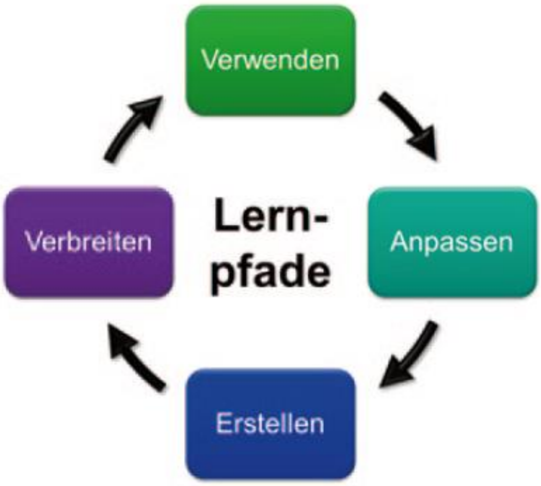


Abbildung 6: Umgang mit Lernpfaden

5.2. Erstellung eines Lernpfades zur Differentialrechnung

Im Zuge dieser Masterarbeit wurde ein Lernpfad zum Inhaltsbereich Differentialrechnung für die 7. Klasse der Sekundarstufe II an allgemeinbildenden höheren Schulen entwickelt. Der Lernpfad zielt darauf ab, dass Schüler:innen nachhaltige Grundvorstellungen zur Differentialrechnung aufbauen, was durch einen fachdidaktischen reflektierten Einsatz der dynamischen Geometriesoftware GeoGebra erreicht werden soll.

Ziel des Lernpfades ist es, dass sich die Heranwachsenden ein tragfähiges Wissen über die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate, der Tangentensteigung und der lokalen Linearität aneignen. Auf die Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors wird im Lernpfad nicht explizit eingegangen, da diese in der didaktischen Literatur nicht als Grundvorstellung angesehen wird (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 153).

Im Folgenden wird die Vorgehensweise bei der Erstellung des Lernpfades erläutert sowie die Auswahl der im Lernpfad verwendeten Aufgaben begründet.

Der Lernpfad wurde als GeoGebraBook erstellt und ist online unter dem Link https://www.geogebra.org/m/xkcrkwna abrufbar. Ein GeoGebraBook ist eine Sammlung von Materialien, die mit GeoGebra angefertigt wurden. Hier können sowohl GeoGebra-Dateien erstellt, sowie bereits vorhandenen GeoGebra-Applets verwendet werden, welche eigenständig zu einem interaktiven Online-Schulbuch zum Lernen und Lehren auf jedem Bildungslevel zusammengefügt werden können (GeoGebra, 2023c). Durch die einfache Benutzeroberfläche können ohne große Schwierigkeiten Kapitel bzw. Unterkapitel eingefügt werden, sodass eine fachdidaktisch sinnvolle Strukturierung der Lerninhalte möglich ist, was wegweisend für einen guten Lernpfad ist (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 12ff.). Durch das Einfügen von Texten, Handlungsaufforderungen zum Formulieren eigener Vermutungen und unterschiedlichen Fragestellungen werden die Lernenden durch den Lernpfad geführt. Der Lernpfad kann somit einerseits direkt im Unterricht eingesetzt werden, aber durch den strukturierten Aufbau ist es auch möglich, dass die Lernenden selbstständig, z. B. zu Hause, mit diesem arbeiten.

Kapitel 1: Wiederholung

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 1. Wiederholung)

Der Lernpfad beginnt mit einer kurzen Wiederholung wesentlicher mathematischer Inhalte, die voraussetzend für die Differentialrechnung sind. In diesem Kapitel wird die Steigung einer linearen Funktion, sowie das Ermitteln von Steigungen mittels Steigungsdreiecken wiederholt, da die Steigung einer Funktion eine entscheidende Rolle bei allen Grundvorstellungen der Differentialrechnung spielt (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147ff.).

In Aufgabe 1 ist ein GeoGebra-Applet zu finden, in der durch Klicken auf das Feld *neue Funktion* eine lineare Funktion generiert wird, bei der das Steigungsdreieck eingezeichnet ist. Zusätzlich wird die Steigung der linearen Funktion am Bildschirm explizit ausgegeben, sodass die Schüler:innen dies nachvollziehen können.

In der 2. Aufgabe können die Lernenden das bereits aufgefrischte Wissen selbst anwenden, in dem sie die Steigung einer linearen Funktion ablesen und in das vorgesehene Feld eintippen sollen. Sobald die Eingabe bestätigt wird, erhalten die Heranwachsenden sofort eine Rückmeldung, ob die von ihnen ermittelte Steigung korrekt ist, oder nicht.

Bei der Aufgabe 3 geht es darum, dass die Schüler:innen erkennen sollen, dass die Steigung einer linearen Funktion nicht nur mittels des Standard-Steigungsdreiecks mit der Breite 1, sondern mit jedem beliebigen Steigungsdreieck ermittelt werden kann. Durch das im GeoGebra-Applet ermöglichte selbstständige Erkunden und durch die Aufforderungen, zum Anstellen von Vermutungen in den anschließenden Fragen 1 – 3, wird das entdeckende Lernen gefördert, was die Grundidee eines jeden Lernpfades sein sollte (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20).

Um das Wiederholungskapitel abzuschließen, ist am Ende noch eine Grafik zu finden, die das Gelernte grafisch, in Worten und mittels mathematischer Formeln zusammenfasst.

Kapitel 2: Einführung

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 2. Einführung)

Im 2. Kapitel wird die Differentialrechnung eingeführt. Aufbauend auf dem bereits wiederholtem Wissen über die Steigung einer linearen Funktion, soll den Schüler:innen klargemacht werden, was das Ziel der Differentialrechnung ist: wie sich die Funktionswerte einer Funktion in der Umgebung einer Stelle ändern (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 140). Vereinfacht bedeutet das, auch bei gebogenen Graphen mit dem Begriff *Steigung* arbeiten zu können.
Als nächstes folgt ein realitätsnahes Einstiegsbeispiel, damit die Heranwachsenden eine Idee bekommen, worum es in der Differentialrechnung geht. Mithilfe eines Weg-Zeit-Diagramms sollen die Lernenden die Geschwindigkeit eines immer schneller werdenden Zuges nach $20\ m$ bestimmen. Die Funktion ist in einem GeoGebra-Applet veranschaulicht und zudem wird die mittlere Geschwindigkeit v in jedem beliebigen Intervall, das manuell durch Ziehen am Punkt B verändert werden kann, mittels der Formel $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ berechnet. Ein erster Ansatz um die Geschwindigkeit nach $20\ m$ zu berechnen, ist die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten $8\ Sekunden$ zu berechnen, da aus der Grafik zu entnehmen ist, dass der Zug nach $8\ Sekunden$ $20\ m$ zurückgelegt hat. Da aber ersichtlich ist, dass der Zug mit der Zeit immer schneller wird, ist klar, dass die Momentangeschwindigkeit nach $20\ m$ höher sein müsste als die Durchschnittsgeschwindigkeit, wodurch ein verbesserter Ansatz benötigt wird. In diesem verbesserten Ansatz wird ein beliebig kleines Steigungsdreieck möglichst nahe beim Punkt B betrachtet. Dies gelingt, indem der Punkt A immer näher zum Punkt B gerückt wird, wobei die Lernenden auf das nächste Problem stoßen, wenn die beiden Punkte genau übereinanderliegen: dann gilt nämlich $\Delta s = \Delta t = 0$, wodurch das Berechnen der Geschwindigkeit v aufgrund der Division durch 0 nicht möglich ist. Um also die Momentangeschwindigkeit nach $20\ m$ bestimmen zu können, müsste der Punkt A „unendliche nahe“ an den Punkt B rücken. Um diesen Grenzübergang durchzuführen, wird die Differentialrechnung benötigt.
Diesem realitätsnahen Einführungsbeispiel liegt die Grundvorstellung der lokalen Ände-

rungsrate zugrunde und die Schüler:innen treten, ohne dass der Momentangeschwindigkeit ein Grenzwert zugeschrieben wird, erstmals in Kontakt mit der Differentialrechnung (Steinbauer & Süss-Stepancik, 2019, S. 110ff.).

Kapitel 3: Lokale Änderungsrate

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 3. Lokale Änderungsrate)

Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate setzen die Kenntnis der mittleren Änderungsrate, also des Differenzenquotienten voraus (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147). Mit dem Differenzenquotienten sind die Schüler:innen bereits in der 6. Klasse konfrontiert worden (RIS, 2023, 6. Klasse), wodurch zu Beginn des Kapitels der Differenzenquotient als Steigung der Sekante in einem dynamischen GeoGebra-Applet wiederholt wird. Den Lernenden sollte dadurch wieder in Erinnerung gerufen werden, dass der Differenzenquotient die mittlere Steigung pro Einheit in einem Intervall angibt, um so die Heranwachsenden im nächsten Schritt an den Differentialquotienten heranführen zu können.

Im Unterkapitel „Vom Differenzen- zum Differentialquotienten“ können die Jugendlichen entdecken, wie der Differenzenquotient durch sukzessives Verkleinern des Intervalls in den Differentialquotienten und in weiterer Folge die Sekante in die Tangente übergeht (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 146ff.). In Aufgabe 1 wird zuerst Zweiteres demonstriert, indem die Schüler:innen den Grenzübergang spielend durch Ziehen am Punkt B erleben können. Auf diese Erkenntnis wird dann in Aufgabe 3 aufgebaut, indem zusätzlich die Steigungen der Sekante und Tangente ausgegeben werden, sodass für die Lernenden ersichtlich ist, dass sich die Steigung der Sekante immer weiter der Steigung der Tangente annähert, umso kleiner das betrachtete Intervall ist. Abschließend werden hierfür die Begriffe *Differentialquotient* bzw. *1. Ableitung* eingeführt. Durch entdeckendes Üben wurde in diesem Unterkapitel der Aufbau eines Begriffsverständnisses zum Differentialquotienten ermöglicht (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20).

Um jedoch die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate zu entfalten, ist es notwendig, dass die Jugendlichen ein Verständnis für die Ableitung als Änderungsrate, also die Vorstellung von Momentangeschwindigkeiten bei Veränderungsprozessen bzw. der Steigung einer Kurve in einem Punkt, aufbauen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147f.). Dies erfolgt im nächsten Unterkapitel „Ableitung als Änderungsrate“ zunächst anhand eines sachbezogenen Beispiels zu einer linearen Funktion. In der Aufgabe 1 geht es darum, die Zuflussrate eines Füllvorgangs als momentane Änderungsrate zu identifizieren. Dadurch, dass es sich hierbei um einen linearen Prozess handelt, sollte den Heranwachsenden klarwerden, dass die momentane Änderungsrate der Steigung, also der 1. Ableitung entspricht. In weiterer Folge geht es darum, dass die Lernenden auch bei krummlinigen Kurven die Steigung einer Funktion als Änderungsrate identifizieren können. Dies erfolgt in den Aufgaben 2 und 3 im Kontext der Geschwindigkeit. In den verfügbaren GeoGebra-Applets können die Schüler:innen den Zusammenhang zwischen Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit entdecken und durch die in zahleichen Fragestellungen Aufforderungen, selbstständig Vermutungen zu formulieren, wird ein individuelles Lernen ermöglicht (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 8), wodurch der Aufbau der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate erreicht werden kann.

Im Unterkapitel „Übungsaufgaben“ sind noch weitere interaktive Beispiele zu finden, damit die Heranwachsenden das Gelernte wiederholen und festigen können. Diese Beispiele können jederzeit zu den vorher genannten Zwecken bearbeitet werden.

Abschließend sind im letzten Unterkapitel nochmals die Grundvorstellungen zur lokalen Änderungsrate, welche die Lernenden in diesem Kapitel aufgebaut haben sollen, zusammengefasst.

Kapitel 4: Tangetensteigung

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 4. Tangentensteigung)

In diesem Kapitel geht es um den Aufbau der Grundvorstellung der Tangentensteigung. Diese bringt jedoch ein wesentliches Problem mit sich: die Tangente darf hierbei nicht mehr als Stützgerade betrachtet werden, sondern der Begriff der Schmieggerade muss eingeführt werden. Dies bedeutet, dass die Tangente eine Gerade ist, die sich lokal dem Verlauf des Funktionsgraphen anschmiegt (Steinbauer & Stüss-Stepancik, 2019, S. 105ff.). Dies wird im ersten Unterkapitel „Tangenten in der Differentialrechnung“ behandelt, indem die Schüler:innen dazu eingeladen werden, eigenständig zu argumentieren, wodurch ein selbstständiger Lernprozess angeregt wird (Schmidt, 2009, S. 2).

Wurde die Vorstellung einer Tangente als Schmieggerade erreicht, soll im Unterkapitel

„Tangentensteigung und Ableitung“ die Grundvorstellung der Tangentensteigung, nämlich, dass die Steigung der Tangente an eine Kurve an einer Stelle genau der Steigung der Kurve an dieser Stelle entspricht (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 149ff.), aufgebaut werden. Dies kann in Aufgabe 1 durch ein dynamisches GeoGebra-Applet erkundet werden.

Als nächstes werden die Lernenden mit der Ableitungsfunktion vertraut gemacht. Bis zum jetzigen Zeitpunkt wurde die Steigung der Funktion zwar als 1. Ableitung definiert, jedoch wurde noch nicht behandelt, dass diese auch eine Funktion beschreibt, die jeder Stelle die Steigung einer Funktion zuordnet. Der Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion kann in Aufgabe 2 entdeckt werden, in dem ein Punkt A eingezeichnet wird, der als x-Koordinate eine Stelle und als y-Koordinate die Steigung der Funktion an dieser Stelle hat. Die Stelle kann nun verändert werden, indem der *Ziehpunkt* verschoben wird. Dadurch, dass der Punkt A eine Spur hinterlässt, entsteht Schritt für Schritt die Ableitungsfunktion. Dieser Zusammenhang ist essentiell für ein tiefgreifendes Verständnis der Differentialrechnung. Es ist notwendig, den Ebenenwechsel zwischen einer Funktion und der Ableitungsfunktion durchführen zu können. Verschmelzen diese Ebenen oder werden sie verwechselt, kann das schnell zu Fehlvorstellungen führen (Hahn & Prediger, 2008, S. 177). In Aufgabe 3 kann der Zusammenhang zwischen einer Funktion und der Ableitungsfunktion, sowie das Zeichnen Letzterer nochmals vertieft werden.

Im Unterkapitel „Übungsaufgaben“ sind noch weitere Beispiele zu finden, die zum Aufbau der Grundvorstellung der Tangentensteigung behilflich sind, sowie zur Festigung des Zusammenhangs zwischen einer Funktion und der Ableitungsfunktion beitragen.

Am Ende sind noch einmal die wesentlichen Aspekte der Grundvorstellung der Tangentensteigung, die in diesem Kapitel entwickelt worden sein sollten, zusammengefasst. Die Schüler:innen sollten nun in der Lage dazu sein, eine Tangente als Schmieggerade zu identifizieren und ein Wissen darüber besitzen, dass die Steigung der Tangente mit der Steigung der Kurve an einer Stelle übereinstimmt und in weiterer Folge die Tangente die lokale Richtung der Kurve angibt (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 149ff.).

Kapitel 5: Lokale Linearität

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 5. Lokale Linearität)

In diesem Kapitel sollen die Jugendlichen die dritte und letzte in der Sekundarstufe II relevanten Grundvorstellungen aufbauen. Zur Vorstellung der lokalen Linearität ist der Aspekt, dass die Steigung einer Funktion äquivalent zum Steigungsfaktor einer affin-linearen Funktion – der Tangente in diesem Punkt – ist, wesentlich (Blum & Törner, 1983, S. 96f.). Dies kann durch das „Funktionenmikroskop", das auf Arnold Kirsch zurückgeht, visualisiert werden: Wenn ein fester Punkt auf dem Graphen einer Funktion betrachtet und dieser mithilfe eines „Mikroskops" vergrößert wird, kann beobachtet werden, dass der Funktionsgraph bei ausreichender Vergrößerung fast geradlinig verläuft. Die Steigung dieses geradlinigen Stücks entspricht dann genau der Steigung der Funktion an dieser Stelle (Kirsch, 1979, S. 25ff.). Diesen Vergrößerungsprozess können die Schüler:innen in Aufgabe 1 des Unterkapitels „Funktionenlupe" selbstständig durch Scrollen des Mausrades erkunden und bekommen so eine erste Vorstellung dieser Grundvorstellung.
Der Aufbau dieser soll dann im nächsten Unterkapitel „Lokale Linearität" passieren. Die hier zu findenden GeoGebra-Applets greifen auf das Prinzip der „Funktionenlupe" zurück, das von H.-J. Elschenbroich entwickelt wurde. Die Idee des „Funktionenmikroskops" wurde erweitert, indem bei der „Funktionenlupe" zwei Fenster nebeneinander zu sehen sind: Das erste Fenster zeigt den Funktionsgraphen in normaler Größe, während das zweite Fenster einen vergrößerten Ausschnitt um einen bestimmten Punkt am Funktionsgraphen zeigt. Die Größe des Ausschnitts kann mithilfe eines Schiebereglers angepasst werden und schrittweise verkleinert werden, wodurch das „Heranzoomen" an den Funktionsgraphen visualisiert wird. Die Lernenden erhalten so einen globalen und einen lokalen Blick auf die Funktion, wodurch sich die Grundvorstellung der lokalen Linearität entwickeln kann (Elschenbroich, 2015, S. 1ff.).
Am Ende des Kapitels sind die wesentlichen Aspekte der Grundvorstellung noch einmal zusammengefasst.

Kapitel 6: Kurvendiskussion

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 6. Kurvendiskussion)

Die Kurvendiskussion ist das Mittel, um Eigenschaften einer Funktion mathematisch zu beweisen und ist deswegen ein wesentlicher Teil der Differentialrechnung (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 192). Deswegen bleibt das Untersuchen von Funktionen auch im modernen Mathematikunterricht bedeutsam. Durch den Gebrauch elektronischer Hilfsmittel kann der Prozess einer Kurvendiskussion jedoch in weniger als einer Minute durch das Klicken auf den richtigen Befehl vollzogen werden, wodurch im Gegensatz zur manuellen Methode, bei der Schritt für Schritt die besonderen Stellen unter Verwendung der Ableitungen bestimmt werden müssen, die Differentialeigenschaften einer Funktion nicht unbedingt bekannt sein müssen (Neumann, 2018, S. 10). Deswegen ist es notwendig, dass die Technologie an dieser Stelle fachdidaktisch reflektiert eingesetzt wird, was im Kapitel „Kurvendiskussion" im Lernpfad versucht wurde, umzusetzen. GeoGebra wird hierbei nicht als Rechen-, sondern als Visualisierungs- und Experimentierwerkzeug verwendet. Durch die zahlreichen dynamischen GeoGebra-Applets können die Heranwachsenden selbstständig die wichtigsten Aspekte der Kurvendiskussion erkunden, was zu einem individuellen Wissensaufbau führt (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20f.). Durch die simultane Verfügbarkeit einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen, gelingt auch der Ebenenwechsel, der wesentlich für das Ableitungskonzept ist. So sollten die Lernenden dazu in der Lage sein, den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen zu verstehen (Klinger, 2017, S. 127f.). Durch die zahlreichen interaktiven Arbeitsaufträge und Aufforderungen zum selbstständigen Erkunden können, basierend auf den in den Kapiteln zuvor aufgebauten Grundvorstellungen, die Differentialeigenschaften von Funktionen entdeckt werden, ohne dass der Technologieeinsatz die primäre Rolle im Unterricht einnimmt, sondern dieser den Lernprozess der Schüler:innen unterstützt. Am Ende des Kapitels sollten die Heranwachsenden es schaffen, Funktionen in Hinblick auf Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen mithilfe der Ableitungen zu untersuchen und über die Differentialeigenschaften der oben genannten wesentlichen Aspekte der Kurvendiskussion Bescheid wissen, sowie diese für Berechnungen anwenden, wie es im Lehrplan vorgesehen ist (RIS, 2023, 7. Klasse).

Kapitel 7: Anwendung der Differentialrechung

(siehe Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung; 7. Anwendung der Differentialrechnung)

Im letzten Kapitel werden die Lernenden noch mit zwei wesentliche Anwendungsgebiete der Differentialrechnung „Wirtschaft" und „Extermwertaufgaben" vertraut gemacht. Diese dienen zwar nicht explizit zum Aufbau von Grundvorstellungen, jedoch können die Heranwachsenden durch das Lösen kontextbezogener Aufgaben das bereits Gelernte in realitätsnahen Beispielen anwenden und festigen.

Teil III: Empirische Untersuchung

6. Studiendesign und Durchführung der Studie

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln theoretische Überlegungen angestellt wurden, wird im Folgenden das Studiendesign diskutiert. Zunächst werden die im Zuge der Masterarbeit zu beantworteten Forschungsfragen dargelegt, gefolgt von der Vorstellung der Forschungsmethode, dem Vorgang der Testentwicklung bis hin zur Darlegung der Stichprobe und die Durchführung der Studie.

6.1. Theoretische Grundlage und Forschungsfragen

Das Zentrum dieser Masterarbeit bildete die Entwicklung eines Lernpfades zur Differentialrechnung, in welchem mittels des Einsatzes des Computerprogramms GeoGebra nachhaltige Grundvorstellungen bei den Lernenden aufgebaut werden sollen. Im Kapitel 2 wurde bereits genau erläutert, was Grundvorstellungen überhaupt sind und welcher Prozess durchlaufen werden muss, um diese zu erwerben. Nachdem im Kapitel 3 die dynamische Geometriesoftware kurz vorgestellt wurde, wurde im 4. Kapitel auf die Vor- und Nachteile eingegangen, die der Technologieeinsatz mit sich bringen kann. Im Anschluss wurde in 5.1. auf das Konzept der Lernpfade und worauf bei der Entwicklung dieser geachtet werden muss, eingegangen. Die Kapitel 2 bis 5.1. bilden die Grundlage für den im Zuge dieser Masterarbeit entwickelten Lernpfad zur Differentialrechnung, der im Kapitel 5.2. bereits vorgestellt und begründet wurde.

Um letztendlich empirisch zu erheben, inwiefern sich der Einsatz des Lernpfades und des Computerprogramms GeoGebra auf den Aufbau von Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung auswirken, wurde eine quantitative Vergleichsstudie durchgeführt. An dieser Studie nahmen acht Klassen an drei Realgymnasien in der Steiermark und in Niederösterreich teil, wobei die Hälfte der Klassen mit dem erstellten Lernpfad arbeiteten und die anderen vier Klassen als Vergleichsgruppe dienten und herkömmlich unterrichtet wurden.

Um die Leistungen der Schüler:innen vergleichen und mögliche Veränderungen evaluieren zu können, wurde vor der Einführung des Differentialrechnungsinhalts ein Pre-Diagnosetest durchgeführt, um den aktuellen Leistungsstand jeder Klasse festzustellen. Nach

Abschluss des Differentialrechnungsinhalts wurde ein Post-Test durchgeführt, der ausgewählte mathematische Aufgaben enthielt, um festzustellen, ob es Unterschiede im mathematischen Verständnis und den Grundvorstellungen zwischen den Versuchs- und Kontrollgruppen gibt. Um die Nachhaltigkeit der erworbenen Grundvorstellungen zu erforschen, wurde etwa ein Monat nach dem Post-Test ein Follow-Up-Test an allen Klassen durchgeführt, der dieselben Fragen wie der Post-Test enthielt, um mögliche Veränderungen beim Lösen der Aufgaben aufzudecken.

Mithilfe der in den Tests erlangten Ergebnisse sollen folgende Forschungsfragen beantwortet werden:

1. *„Inwiefern beeinflusst der Einsatz von GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung den Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Schüler:innen?“*
2. *„Entwickeln die Schüler:innen durch den Einsatz des erstellten Lernpfades nachhaltigere Grundvorstellungen zur Differentialrechnung?“*
3. *„Inwiefern wirkt sich die Verwendung von GeoGebra und des Lernpfades auf die mathematischen Fertigkeiten der Schüler:innen aus?“*

6.2. Studiendesign

In diesem Abschnitt wird das Studiendesign beschrieben. Zunächst wird erklärt, wie die Studie aufgebaut ist, gefolgt von einer Beschreibung der verwendeten Instrumente zur Datenerhebung.

6.2.1. Quantitative Forschungsmethoden

Damit die aufgetretenen Forschungsfragen beantwortet werden können, wurde eine quantitative Vergleichsstudie durchgeführt. Das Ziel der quantitativen Forschung ist das Messen von Merkmalen und deren Häufigkeiten in einer Stichprobe, was durch Standardisierung und statistische Verfahren unterstützt wird. Die große Zahl an Proband:innen ermöglicht hierbei eine Generierung vergleichbarer Daten. Des Weiteren können quantitative Methoden genutzt werden, um Hypothesen durch Kontrolle von Störfaktoren und ein deduktives Vorgehen zu kontrollieren. Das Ziel ist, verallgemeinerbare Ergebnisse zu erzielen, die auf Einzelfälle übertragen werden können. Die Zufallsauswahl der Fälle trägt zur Verallgemeinerbarkeit bei (Wolf, 2008, S. 15). Zusammengefasst sind quantitative

Verfahren besonders geeignet, um Sachverhalte objektiv zu messen und zu quantifizieren sowie Hypothesen und statistische Zusammenhänge zu testen (Winter, 2000).

Ein Vorteil dieser Forschungsmethode ist die Möglichkeit, quantifizierbare Ergebnisse zu erhalten, die statistische Zusammenhänge und Unterschiede aufzeigen können. Durch die Untersuchung großer Stichproben können repräsentative Ergebnisse erzielt werden, was ebenfalls ein Vorteil ist. Zudem ermöglicht die Standardisierung der Untersuchungssituation eine größere Objektivität und Vergleichbarkeit der Ergebnisse. Allerdings gibt es auch Nachteile bei der Verwendung quantitativer Forschungsmethoden. Eine Einschränkung besteht darin, dass während der Untersuchung keine Flexibilität besteht, da die Fragen bereits vorher festgelegt sind und individuelle Einblicke nicht berücksichtigt werden können. Zudem werden keine subjektiven Einblicke in die Thematik gewonnen, sondern nur Mittelwerte. Um zu repräsentativen Ergebnissen zu kommen, bedarf es zudem einer aufwendigen Datenauswertung, für die umfassende statistische Kenntnisse notwendig sind. Um also eine aussagekräftige Untersuchung durchzuführen, ist es notwendig, die Vor- und Nachteile quantitativer Forschungsmethoden zu beachten (u. a.: Winter, 2000; Wolf, 2008, S. 15ff.).

6.2.2. Aufbau und Durchführung der Studie

Die Studie wurde im Wintersemester 2022/2023 an acht 7. Klassen (11. Schulstufe) allgemeinbildender Schulen durchgeführt und besteht aus drei Testungen, denen sich sowohl die Versuchs- als auch die Kontrollklassen unterworfen haben, wobei die Versuchsgruppe mit der im Zuge dieser Masterarbeit entworfenen Interventionsmethode arbeiteten.

Um sicherzustellen, dass die Klassen vergleichbar sind und Veränderungen der Leistungen der Schüler:innen erfasst werden können, wurde im Oktober 2022 zunächst ein Pre-Diagnosetest durchgeführt, um den aktuellen Stand des mathematischen Wissens und Verständnisses der Teilnehmer:innen zu erfassen. Anschließend wurde der Bereich Differentialrechnung im Mathematikunterricht behandelt, wobei die Versuchsklassen durch einen im Zuge dieser Masterarbeit entwickelten Lernpfad unterstützt wurden. Der Einsatz des Lernpfades konnte hierbei individuell durch die unterrichtende Lehrperson bestimmt werden und so wurde dieser einerseits direkt im Unterricht, aber andererseits auch als zusätzliches Übungsmaterial zu Hause verwendet. Wie bereits in Kapitel 5.2 erläutert, wurde der Lernpfad speziell dafür entwickelt, nachhaltige Grundvorstellungen zur Differentialrechnung bei den Schüler:innen aufzubauen, was durch die Ergebnisse der Post- und Follow-Up-Tests belegt werden soll. Direkt nach Abschluss des Inhaltsbereichs Differentialrechnung wurde kurz vor den Weihnachtsferien im Dezember 2022 der Post-Test in den Versuchs- und Kontrollklassen durchgeführt, um die aufgebauten Grundvorstellungen zu ermitteln. Anschließend erfolgte im Januar 2023 der Follow-Up-Test, der die gleichen Fragestellungen wie der Post-Test enthielt und dazu diente, die Nachhaltigkeit der aufgebauten Grundvorstellungen zu überprüfen.

6.2.2.1. Pre-Diagnosetest

Der Pre-Diagnosetest (siehe Anhang 2: Pre-Diagnosetest) wurde im Oktober 2022 in den teilnehmenden Versuchs- und Kontrollklassen durchgeführt, um den aktuellen Leistungsstand in Mathematik zu eruieren, um so die Vergleichbarkeit der erzielten Ergebnisse im Post- und Follow-Up-Test garantieren zu können.

Zu Beginn der Studie wurden zunächst relevante soziodemographische Daten wie die besuchte Schule, die Klasse, das Alter und das Geschlecht der Teilnehmenden erhoben. Zudem wurden die Proband:innen aufgefordert, einen persönlichen Code zu generieren, damit einerseits die Ergebnisse später individuell analysiert, aber andererseits auch die Anonymität gesichert werden können.
Der Pre-Diagnosetest umfasst zehn Aufgaben, die im Format der zentralen Reifeprüfung gestaltet sind und vom Aufgabenpool des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung ausgewählt wurden (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2022). Die Aufgaben wurden entsprechend der notwendigen Voraussetzungen ausgesucht, die die Schüler:innen bereits vor Einführung der Differentialrechnung mitbringen sollten. Dazu zählen unter anderem Kenntnisse über bestimmte Funktionsarten sowie deren Eigenschaften wie beispielsweise Funktionsverläufe, Extrem- und Wendestellen, Monotonie- und Krümmungsbereiche. Insbesondere lineare Funktionen und die Steigung von Geraden sind hierbei von Bedeutung (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 122). Darüber hinaus sollten die Lernenden bereits ein funktionales Denken entwickelt haben, was bedeutet, dass sie über eine spezifische Denkweise im Umgang mit Funktionen verfügen (Vollrath, 1989). Auch die Änderungsmaße, insbesondere der Differenzenquotient, die für die Differentialrechnung wesentlich sind, wurden bereits in der 6. Klasse behandelt (RIS, 2023, 6. Klasse).

Zum Lösen des Pre-Diagnosetest standen den Schüler:innen alle Hilfsmittel zur Verfügung, die im Mathematikunterricht erlaubt sind. Der Test wurde als Pen-and-Paper-Test durchgeführt und die Proband:innen hatten 30 Minuten Zeit, um die Aufgaben zu lösen.

In Tabelle 1 sind die Variablen des Pre-Diagnosetests aufgeführt, während Tabelle 2 die jeweilige Rolle der Variablen bei den einzelnen Aufgaben verdeutlicht.

Tabelle 1: Items des Pre-Diagnosetests

Variable	Beschreibung
V1	Was ist eine Funktion?
V2	Umgang mit Funktionsgraphen (Argument und Funktionswerte bestimmen, Eigenschaften von Funktionen am Funktionsverlauf erkennen)
V3	Eigenschaften linearer Funktionen
V4	Steigung von Geraden
V5	Funktionen im Kontext
V6	Eigenschaften von Funktionen (Funktionsverlauf, Extrem- und Wendestellen, Monotonie- und Krümmungsbereiche)
V7	Änderungsmaße und Differenzenquotient

Tabelle 2: Items der im Pre-Diagnostetst beinhaltenden Aufgaben

Aufgabe \ Variable	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7
Reelle Funktion	X	X					
Charakteristische Eigenschaften einer linearen Funktion			X	X			
Temperaturskala		X		X	X		
Kraftstoffverbrauch		X			X		
Funktionale Abhängigkeit		X			X		
Funktionseigenschaften erkennen		X				X	
Polynomfunktion 4. Grades		X				X	
Argumente		X				X	
Änderung der Spannung		X					X
Differenzenquotient					X		X

6.2.2.2. Post-Test

Nachdem der Themenbereich Differentialrechnung im Mathematikunterricht behandelt worden war, unterzogen sich die Schüler:innen der Versuchs- und Kontrollklassen im Dezember 2022 dem Post-Test (siehe Anhang 3: Post- bzw. Follow-Up-Test).

Zu Beginn wurden, wie bereits beim Pre-Diagnosetest, soziodemografische Daten wie Schule, Klasse, Alter und Geschlecht erfasst. Darüber hinaus wurden die Schüler:innen erneut dazu aufgefordert, ihren individuellen Code zu generieren, um die Ergebnisse später analysieren zu können. Der Post-Test besteht aus sieben Aufgaben, wobei die Aufgaben 2-7 im Format der zentralen Reifeprüfung gestaltet sind. Die Aufgaben wurden aus dem Aufgabenpool des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft und Forschung sowie aus einem Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen, der von Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand entwickelt wurde, entnommen (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2023; Grefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2021).

Um die im Bereich Differentialrechnung erworbenen Grundvorstellungen zu erfassen, wurden den Lernenden nach jeder Aufgabe drei Argumentation mit bestimmten Grundvorstellungen vorgelegt und sie wurden gebeten, auf einer vierstufigen Likert-Skala (von „Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.“ bis „Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.“) anzugeben, inwieweit diese Argumentation mit ihrem eigenen Denken übereinstimmt. Der Vorteil einer geraden Skalierung der Likert-Skala ist das Fehlen einer Mitteloption, wodurch die Proband:innen gezwungen sind, eine Tendenz zu wählen (Novustat, 2023). Dies soll deutlicher anzeigen, ob eine Grundvorstellung bei den Heranwachsenden ausgeprägt ist oder nicht.

Zur Lösung des Post-Tests wurden 30 Minuten veranschlagt und den Schüler:innen wurde erlaubt, alle Hilfsmittel zu verwenden, die auch im Mathematikunterricht eingesetzt wurden. Der Post-Test wurde digitalisiert, um eine schnellere Datenauswertung zu ermöglichen. Die Schüler:innen konnten den Test über einen Link abrufen.

Tabelle 3 gibt einen Überblick darüber, welche Aufgaben welche Inhalte der Differentialrechnung beinhalten. Tabelle 4 zeigt die Grundvorstellungen, die im Post-Test abgefragt wurden. In Tabelle 5 ist ersichtlich, welches Item sich bei den Aufgaben auf welche Grundvorstellung bezieht.

Tabelle 3: Mathematische Inhalte der Aufgaben des Post-Tests

Aufgabe	Mathematischer Inhalt
1	Die erste Ableitung einer Funktion
2	Extremstellen einer Polynomfunktion
3	Monotonieverhalten einer Kurve
4	Die Steigung der Funktion an einer Stelle
5	Änderung der Änderungsrate (2. Ableitung)
6	Wendepunkt einer Funktion
7	Kontext Zeit-Ort

Tabelle 4: Grundvorstellungen der Differentialrechnung und Abkürzungen

Grundvorstellung	Abkürzung
Lokale Änderungsrate	Ä
Tangentensteigung	T
Lokale Linearität	L

Tabelle 5: Auf welche Grundvorstellungen sich die Items im Post-Test beziehen

	Item 1	Item 2	Item 3
Aufgabe 1	Ä	T	L
Aufgabe 2	T	L	Ä
Aufgabe 3	Ä	L	T
Aufgabe 4	L	T	Ä
Aufgabe 5	L	Ä	T
Aufgabe 6	T	Ä	L
Aufgabe 7	Ä	T	L

6.2.2.3. Follow-Up-Test

Der Follow-Up-Test (siehe Anhang 3: Post- bzw- Follow-Up-Test) ist derselbe wie der Post-Test und die beiden Tests wurden unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Der Zweck des Follow-Up-Tests besteht darin, die Nachhaltigkeit der vermittelten Grundvorstellungen bei den Schüler:innen zu erfassen.

Der Follow-Up-Test wurde etwa einen Monat nach dem Post-Test im Januar 2023 durchgeführt, wobei die Weihnachtsferien eine zweiwöchige Pause zwischen den Tests darstellten. Diese Pause betont die Bedeutung der Nachhaltigkeit, da die Schüler:innen in den Ferien normalerweise keine mathematischen Themen bearbeiten und somit ein stärkerer Effekt erzielt werden kann. Darüber hinaus soll der Follow-Up-Test zeigen, ob sich die Grundvorstellungen der Lernenden im Laufe der Zeit verändert haben und wenn ja, in welchem Umfang.

6.2.3. Stichprobe

Die vorliegende Untersuchung basiert auf einer Stichprobe von insgesamt 181 Schüler:innen aus acht 7. Klassen von drei Realgymnasien in der Steiermark und Niederösterreich. Dabei sind 104 Teilnehmende männlich, 63 weiblich und 14 divers. Die höhere Anzahl an männlichen Proband:innen lässt sich auf den generell höheren Männeranteil an Realgymnasien zurückführen.

Die teilnehmenden Klassen so aufgeteilt, sodass, jeweils die Hälfte der Klassen einer Schule als Versuchsgruppe dienten und mithilfe der Intervention unterrichtet wurden. Die anderen Klassen stellen die Kontrollgruppe dar und wurden herkömmlich unterrichtet. Diese Einteilung hat den Vorteil, dass so auch schulinterne Ergebnisse diskutiert werden können.

Die Versuchsgruppe setzt sich aus insgesamt vier Klassen zusammen, nämlich der 7A des BRG Petersgasse in der Steiermark, der 7C und 7D des BRG Kepler ebenfalls in der Steiermark sowie der 7A des BRG Gröhrmühlgasse in Niederösterreich. Insgesamt umfasst die Versuchsgruppe 99 Schüler:innen, von denen 61 männlich, 26 weiblich und 12 divers sind. Die Kontrollgruppe besteht aus den restlichen Klassen, nämlich der 7B des BRG Petersgasse, der 7A und 7B des BRG Kepler sowie der 7B des BRG Gröhrmühlgasse. Insgesamt gibt es in der Kontrollgruppe 82 Lernende, von denen 43 männlich, 37 weiblich und 2 divers sind.
Die unterschiedliche Anzahl an Proband:innen in der Versuchs- und Kontrollgruppe ist auf die Klassengröße zurückzuführen und wurde nicht absichtlich gewählt.

Leider haben krankheitsbedingte Fehlzeiten dazu geführt, dass lediglich 91 Proband:innen alle drei Tests (Pre-Diagnosetest, Post-Test und Follow-Up-Test) geschrieben haben, davon 41 in der Versuchs- und 56 in der Kontrollgruppe.

Die geringere Anzahl in der Versuchsgruppe ist auf die 7A Klasse des BRG Gröhrmühlgasse zurückzuführen, bei der es bei der Durchführung des Follow-Up-Tests aufgrund von Problemen mit der Internetverbindung lediglich von 2 Schüler:innen Ergebnisse von allen drei Tests gibt. Eine erneute Durchführung des Follow-Up-Tests ist nicht möglich gewesen und hätte außerdem möglicherweise die Testergebnisse verfälscht. Aus diesem Grund wurden die Ergebnisse dieser Klasse bei der Darstellung der Ergebnisse teilweise ausgeschlossen.

7. Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der im Zuge dieser Masterarbeit durchgeführten empirischen Untersuchung offen gelegt. Die Proband:innen der Versuchs- und Kontrollklassen haben sich, wie in Kapitel 6.2.2. genau erläutert, drei Tests unterworfen, deren Ergebnisse nun dazu verwendet werden sollen, die zu Beginn formulierten Forschungsfragen zu beantworten.

Zum Auswerten der Ergebnisse wurden unterschiedliche Methoden angewendet, welche nachfolgend kurz vorgestellt werden. Im Anschluss werden die Ergebnisse der Studie präsentiert.

7.1. Auswertungsverfahren

Durch die durchgeführten Tests konnten unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden. Zum einen können Aussagen über den Leistungsstand, inklusive möglicher Veränderungen, der Schüler:innen in den teilnehmenden Klassen getroffen werden. Zum anderen kann mit Hilfe der gewonnenen Daten analysiert werden, welche Grundvorstellungen bei den Lernenden wie ausgeprägt und wie nachhaltig diese sind. Bevor genauer erläutert wird, wie die Ergebnisse ausgewertet wurden, werden zuerst noch die t-Tests vorgestellt, die eine wesentliche Rolle bei der Analyse der Daten spielen.

7.1.1. Einseitige t-Tests

Einseitige t-Tests können sowohl bei unabhängigen, als auch bei abhängigen Stichproben durchgeführt werden.

Einseitige t-Tests für unabhängige Stichproben sind statistische Verfahren, um zu bestimmen, ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Mittelwerten von zwei unabhängigen Stichproben gibt. Dieser Test wird als einseitig bezeichnet, da er nur darauf abzielt, ob ein signifikanter Unterschied in eine bestimmte Richtung (entweder positiv oder negativ) zu finden ist. Um einen einseitigen t-Test für unabhängige Stichproben durchzuführen, werden die Mittelwerte der beiden Stichproben berechnet und miteinander verglichen. Anschließend wird die Varianz der beiden Stichproben verwendet, um einen t-Wert zu berechnen, der angibt, wie weit die beiden Mittelwerte voneinander entfernt sind. Wenn der berechnete t-Wert größer als der kritische t-Wert, welcher von der Anzahl der Freiheitsgrade und dem Signifikanzniveau abhängig ist, wird die Nullhypothese H_0, die besagt, dass es keinen signifikanten Unterschied zwischen den Mittelwerten gibt, verworfen und es wird die Alternativhypothese H_1 angenommen, dass es einen signifikanten Unterschied zwischen den Mittelwerten gibt. Zudem muss noch das Signifikanzniveau α beachtet werden, das die Wahrscheinlichkeit definiert, mit der ein statistisch signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen erwartet wird, obwohl es in Wirklichkeit gar keinen Unterschied gibt. Zur Auswertung der Ergebnisse in dieser Masterarbeit wurde immer ein Alpha-Level von 0,05 gewählt, was bedeutet, dass es eine fünfprozentige Wahrscheinlichkeit gibt, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen. Die Nullhypothese wird immer dann abgelehnt, wenn die mittels des t-Tests berechnete Wahrscheinlichkeit kleiner als das Alpha-Level ist (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2006, S. 43ff.).

Im Gegensatz zum einseitigen t-Tests unabhängiger Stichproben kann ein einseitiger t-Test abhängiger Stichproben durchgeführt werden, um zu überprüfen, ob es einen signifikanten Unterschied zwischen den Mittelwerten von zwei abhängigen Stichproben gibt. Ein solcher Test kann verwendet werden, wenn die Stichproben miteinander verbunden sind, d. h. wenn dieselben Personen in beiden Stichproben vertreten sind (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2006, S. 89ff.). Das Verwerfen bzw. Beibehalten der Nullhypothese passiert hierbei unter denselben Annahmen wie beim einseitigen t-Test unabhängiger Stichproben (Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2006, S. 43).

7.1.2. Auswertung der Testergebnisse

Der Pre-Diagnosetest besteht aus zehn Aufgaben, die entweder richtig oder falsch beantwortet werden können. Ein Item wird lediglich als korrekt angesehen, wenn alle Kreuze ordnungsgemäß gesetzt oder das Ergebnis fehlerfrei berechnet und interpretiert wurde. Ein korrektes Ergebnis bringt einen Punkt, und die Gesamtpunktzahl jedes Lernenden ergibt das Testergebnis. Daraufhin wurden die Durchschnittswerte der erreichten Punktzahl in jeder Klasse berechnet, um Aufschluss darüber zu geben, ob alle teilnehmenden Klassen in etwa auf dem gleichen mathematischen Niveau sind. Die Mittelwerte der Versuchs- und Kontrollgruppe wurden zudem einem t-Test für unabhängige Stichproben unterzogen, um festzustellen, ob sich die beiden Gruppen signifikant voneinander unterscheiden (DATAtab, 2023b). Der Pre-Diagnosetest wurde hauptsächlich durchgeführt, um die Vergleichbarkeit der einzelnen Klassen zu gewährleisten.

Für die Auswertung des Post- und Follow-Up-Tests werden dieselben Auswertungsverfahren herangezogen, da die beiden Tests dieselben sind. Genauso wie beim Pre-Diagnosetest kann jede Aufgabe entweder richtig oder falsch beantwortet werden, wobei eine korrekte Lösung nur dann anerkannt wird, wenn alle Kreuze fehlerfrei gesetzt wurden. Die erreichte Gesamtpunktzahl ergibt das Testergebnis des Post- bzw. Follow-Up-Tests. Zusätzlich werden die prozentual korrekt gelösten Aufgaben berechnet, um eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu ermöglichen.

Zur Erfassung der Schwierigkeit der einzelnen Aufgaben wird eine weitere Auswertung durchgeführt. Hierbei wird ermittelt, welcher Prozentsatz der Schüler:innen einer Klasse das jeweilige Beispiel richtig gelöst hat. Anschließend wird der Mittelwert des erreichten Prozentsatzes aller teilnehmenden Klassen berechnet, um eine Gesamtbetrachtung zu ermöglichen. Um eine Vergleichbarkeit zwischen den Versuchs- und Kontrollklassen herzustellen, werden die Ergebnisse zudem gesondert betrachtet. Zur Überprüfung möglicher signifikanter Unterschiede zwischen den Mittelwerten der beiden Gruppen werden die Ergebnisse des Post- bzw. Follow-Up-Tests einem einseitigen t-Test für unabhängige Stichproben unterzogen (DATAtab, 2023b).

Die Ergebnisse des Post- und Follow-Up-Tests werden zudem differenziert nach Geschlecht ausgewertet, um eventuelle Unterschiede zwischen männlichen und weiblichen Teilnehmenden zu untersuchen. Hierbei werden die Ergebnisse jeder Gruppe einem einseitigen t-Test für unabhängige Stichproben unterzogen, um mögliche signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen zu ermitteln (DATAtab, 2023b).

Um Veränderungen in der Leistung der Schüler:innen zwischen dem Post- und Follow-Up-Test aufzuzeigen, werden die erreichten Prozentsätze der Versuchs- und Kontrollklassen verglichen. Hierfür wird ein einseitiger t-Test für abhängige Stichproben durchgeführt, um signifikante Unterschiede zu ermitteln. Außerdem wurden die Veränderungen geschlechterspezifisch betrachtet und ebenfalls mittels eines t-Tests für abhängige Stichproben beurteilt (DATAtab, 2023a).

Um die vorhandenen Grundvorstellungen zu analysieren, wurden die Schüler:innen beim Post- bzw. Follow-Up-Test nach jeder Aufgabe dazu aufgefordert, auf einer 4-stufigen Likert-Skala anzukreuzen, inwiefern die drei angegebenen Grundvorstellungen zum jeweiligen Beispiel mit ihrem eigenen Denken übereinstimmen. Die Skala reichte von 1 („Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise") bis 4 („Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise"). Auf diese Weise kann für jede Aufgabe ermittelt werden, welche primäre Grundvorstellung von den Schüler:innen bei der Lösung der Aufgabe verwendet wurde. Nachdem die Grundvorstellungen für alle Aufgaben des Post- bzw. Follow-Up-Tests erfasst wurden, werden die absoluten Häufigkeiten der genannten Grundvorstellungen betrachtet. Das Maximum dieser Häufigkeiten gibt die primäre Grundvorstellung jedes einzelnen Lernenden an. Falls zwei oder alle drei Grundvorstellungen gleich stark ausgeprägt sind, ist auch eine Mischform als Grundvorstellung möglich.

Nach der getrennten Auswertung der Grundvorstellungen im Post- und Follow-Up-Test können diese miteinander verglichen werden, um mögliche Veränderungen im Denkansatz der Schüler:innen aufzuzeigen.

Durch die Analyse der Grundvorstellungen jedes einzelnen Lernenden für alle Aufgaben im Post- bzw. Follow-Up-Test kann außerdem ermittelt werden, mit welcher primären Grundvorstellung die Klasse bei der Bearbeitung der Beispiele vorgegangen ist. Hierfür wurden erneut die absoluten Häufigkeiten der klassenweise verwendeten Grundvorstellungen erfasst. Das Maximum dieser stellt die primäre Grundvorstellung der Klasse dar.

7.2. Ergebnisse der Studie

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Studie präsentiert.

7.2.1. Pre-Diagnosetest

Beim Pre-Diagnosetest konnten 10 Punkte erreicht werden. Das arithmetische Mittel aller teilnehmenden Klassen beträgt 5,38 Punkte, was 53,8% der zu erreichenden Höchstpunktzahl entspricht. Die höchste durchschnittliche Punktezahl erreichte die 7A des BRG Kepler mit 6,06 Punkten. Die im Mittel niedrigsten Punkte wurden von der 7B des BRG Petersgasse mit 4,56 Punkten erreicht.

Betrachtet man die Versuchs- und Kontrollklassen gesondert, erzielten die Versuchsklassen ein arithmetisches Mittel von 5,31 Punkten, wohingegen die Kontrollklassen eine etwas höhere durchschnittliche Punktezahl, nämlich 5,44, erreichten. Ein einseitiger t-Test für unabhängige Variablen zeigt jedoch, dass die Mittelwerte sich nicht signifikant unterscheiden. In Tabelle 6 sind die Ergebnisse des t-Tests dargestellt.

Tabelle 6: Einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben (Pre-Diagnosetest)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Eine Gruppe hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Pre-Test	**Versuchsklassen**	**Kontrollklassen**
Mittelwert	5,31	5,4425
Varianz	0,1931	0,4088

t-Statistik	$-0{,}3415566$
Kritischer t-Wert	1,94318028
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,37216457

Aufgrund dessen, dass der Betrag des Werts der t-Statistik kleiner ist als der kritische t-Wert, besteht die Annahme zur Beibehaltung der Nullhypothese, die besagt, dass die Mittelwerte der beiden Gruppen in etwa gleich sind. Die berechnete Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen ist zudem größer als unser Alpha-Wert von 0,05, wodurch die Nullhypothese beibehalten wird (DATAtab, 2023b). Es besteht also kein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der erreichten Punktezahl zwischen der Versuchs- und Kontrollgruppe, wodurch die Vergleichbarkeit der einzelnen Klassen gegeben ist.

7.2.2. Post-Test

Im Gegensatz zum Pre-Diagnosetest umfasste der Post-Test nur 7 Aufgaben, wodurch die erzielten Ergebnisse in Prozent betrachtet werden, um diese besser analysieren zu können.

Das arithmetische Mittel der erreichten Prozente beim Post-Test beträgt 61 %, was etwas höher ist als beim Pre-Diagnosetest. Den höchsten durchschnittlichen Prozentwert erreichte die 7C des BRG Kepler mit 68 %, den im Mittel niedrigsten Prozentwert erzielten die 7D des BRG Kepler und die 7B des BRG Gröhrmühlgasse mit jeweils 53 %. Betrachtet man die Versuchs- und Kontrollgruppen gesondert, erzielten die Schüler:innen der Versuchsklassen ein etwas höheres arithmetisches Mittel von 62,25 % im Gegensatz zu den Lernenden der Kontrollklassen, die im Mittel 60,41 % erreichten. Ein einseitiger t-Test für unabhängige Variablen zeigt jedoch, dass sich die Mittelwerte der erreichten Prozente beim Post-Test der Versuchs- bzw. Kontrollgruppe nicht signifikant unterscheiden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7 dargestellt.

Tabelle 7: Einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben (Post-Test)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Eine Gruppe hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Post-Test	**Versuchsklassen**	**Kontrollklassen**
Mittelwert	0,6225	0,6041
Varianz	0,0048	0,003

t-Statistik	0,39821609
Kritischer t-Wert	1,94318028
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,35212705

Der einseitige t-Test für unabhängige Stichproben wurde unter der Annahme der Nullhypothese H_0, dass die Mittelwerte der Versuchs- und Kontrollklassen gleich sind, und der Alternativhypothese H_1, dass der Mittelwert einer der beiden Gruppen signifikant höher ist, durchgeführt. Das Ergebnis zeigt jedoch, dass die Nullhypothese nicht verworfen werden darf, da der Wert der t-Statistik kleiner ist als der kritische t-Wert und die berechnete Wahrscheinlichkeit größer als der Alpha-Wert 0,05 ist. Das bedeutet, dass sich die Mittelwerte der erreichten Prozentzahl der Versuchs- und Kontrollgruppe nicht signifikant unterscheiden (DATAtab, 2023b).

In fast allen Klassen konnte die Grundvorstellung der Tangentensteigung als primär identifiziert werden. Lediglich die 7A des BRG Gröhrmühlgasse arbeitete hauptsächlich mit der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate. Demzufolge kann festgehalten werden, dass bei den Schüler:innen der Kontrollgruppe weitläufig die Grundvorstellung der Tangentensteigung als primär identifiziert werden kann. Die Ergebnisse des Post-Tests inklusive der Grundvorstellungen sind in Tabellen 8 und 9 dargestellt.

Tabelle 8: Ergebnisse und Grundvorstellungen der Versuchsgruppe (Post-Test)

Versuchsgruppe		
Klasse	**Prozentwert**	**Primäre Grundvorstellung**
7A BRG Petersgasse	67 %	Tangentensteigung
7C BRG Kepler	68 %	Tangentensteigung
7D BRG Kepler	53 %	Tangentensteigung
7A BRG Gröhrmühlgasse	61 %	Lokale Änderungsrate

Tabelle 9: Ergebnisse und Grundvorstellungen der Kontrollgruppe (Post-Test)

Kontrollgruppe		
Klasse	**Prozentwert**	**Primäre Grundvorstellung**
7B BRG Petersgasse	64 %	Tangentensteigung
7A BRG Kepler	60 %	Tangentensteigung
7B BRG Kepler	65 %	Tangentensteigung
7B BRG Gröhrmühlgasse	53 %	Tangentensteigung

7.2.3. Follow-Up-Test

Der Follow-Up-Test umfasste dieselben Aufgaben wie der Post-Test und lieferte folgende Ergebnisse. Das arithmetische Mittel der erreichten Prozentwerte aller teilnehmenden Klassen beträgt 58 %. Das beste Ergebnis erzielte die 7A des BRG Petersgasse mit einem durchschnittlichen Prozentwert von 71 %. Das im Mittel schlechteste Ergebnis wurde von der 7A des BRG Gröhrmühlgasse mit nur 36 % erreicht. Das liegt aber daran, dass aufgrund von Verbindungsproblemen mit dem Internet während der Durchführung des Follow-Up-Tests nur von zwei Schüler:innen Ergebnisse vorliegen. Lässt man diese Klasse also außer Acht, wurde der durchschnittlich niedrigste Prozentwert von der 7B des BRG Gröhrmühlgasse mit 46 % erreicht. Außerdem steigt das arithmetische Mittel der erreichten Prozentwerte aller Klassen auf 61 %.

Betrachtet man die Ergebnisse der Versuchs- und Kontrollklassen getrennt, so erzielte die Versuchsgruppe im Durschnitt 57 %, was etwas unter dem Gesamtmittel liegt. Wird das Ergebnis der 7A des BRG Gröhrmühlgasse jedoch nicht miteinberechnet, steigt das arithmetische Mittel auf 64 %. Die Kontrollgruppe erreichte durchschnittlich 58 %, was etwas niedriger als das Ergebnis der Versuchsgruppe ist. Um zu überprüfen, ob die sich die erreichten Mittelwerte der Versuchs- und Kontrollklassen signifikant unterscheiden, wurde ein einseitiger t-Test für unabhängige Variablen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 10 festgehalten. Außerdem wurde ein weiterer t-Test für unabhängige Stichproben durchgeführt, in dessen die 7A des BRG Gröhrmühlgasse nicht berücksichtigt wurde. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 11 dargestellt.

Tabelle 10: Einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben (Follow-Up-Test - inklusive 7A BRG Gröhrmühlgasse)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Eine Gruppe hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Post-Test	Versuchsklassen	Kontrollklassen
Mittelwert	0,5725	0,58
Varianz	0,0255	0,0088

t-Statistik	$-0{,}0809236$
Kritischer t-Wert	1,94318028
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,46906726

Tabelle 11: Einseitiger t-Test für unabhängige Stichproben (Follow-Up-Test - exklusive 7A BRG Gröhrmühlgasse)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Eine Gruppe hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Post-Test	Versuchsklassen	Kontrollklassen
Mittelwert	0,6433	0,58
Varianz	0,0082	0,0088

t-Statistik	0,89556909
Kritischer t-Wert	2,01504837
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,20575984

Die t-Tests zeigen, dass sich die Mittelwerte der Versuchs- und Kontrollklassen nicht signifikant unterscheiden. Dadurch, dass in beiden Fälle (sowohl inklusive als auch exklusive der 7A des BRG Gröhmühlgasse) der Betrag des Werts der t-Statistik kleiner ist als der kritische t-Wert, besteht die Annahme zur Beibehaltung der Nullhypothese. Des Weiteren ist die berechnete Wahrscheinlichkeit bei beiden Tests größer als der Alpha-Wert 0,05, wodurch die Nullhypothese nicht verworfen werden darf (DATAtab, 2023b).

Beim Follow-Up-Test arbeiteten alle Klassen primär mit der Grundvorstellung der Differentialrechnung als Tangentensteigung, nun auch die 7A des BRG Gröhrmühlgasse, die beim Post-Test noch die Grundvorstellung als lokale Änderungsrate anwendete. Dadurch, dass aber nur zwei Testergebnisse dieser Klasse vorliegen, ist diese Veränderung der primären Grundvorstellung nicht wirklich aussagekräftig, vor allem wenn beachtet wird, dass die beiden Schüler:innen beim Post-Test eine Mischform (Tangentensteigung und lokale Änderungsrate) aufwiesen.

Die Ergebnisse des Follow-Up-Tests inklusive der Grundvorstellungen sind in Tabelle 12 und 13 festgehalten.

Tabelle 12: Ergebnisse und Grundvorstellungen der Versuchsgruppe (Follow-Up-Test)

Versuchsgruppe		
Klasse	**Prozentwert**	**Primäre Grundvorstellung**
7A BRG Petersgasse	71 %	Tangentensteigung
7C BRG Kepler	68 %	Tangentensteigung
7D BRG Kepler	54 %	Tangentensteigung
7A BRG Gröhrmühlgasse	36 %	Tangentensteigung

Tabelle 13: Ergebnisse und Grundvorstellungen der Kontrollgruppe (Follow-Up-Test)

Kontrollgruppe		
Klasse	**Prozentwert**	**Primäre Grundvorstellung**
7B BRG Petersgasse	68 %	Tangentensteigung
7A BRG Kepler	56 %	Tangentensteigung
7B BRG Kepler	62 %	Tangentensteigung
7B BRG Gröhrmühlgasse	46 %	Tangentensteigung

7.2.4. Geschlechterspezifische Ergebnisse

Bereits beim Pre-Test erreichten die männlichen Teilnehmenden einen etwas höheren Mittelwert, nämlich 5,69 Punkte (56,9 %), als die weiblichen, die ein arithmetisches Mittel von 5,29 Punkten (52,9 %) erzielten. Eine ähnliche Tendenz ist beim Post-Test zu erkennen, bei dem die Schüler einen durchschnittlichen Prozentwert von 61,5 %, die Schülerinnen hingegen nur 56,3 % erzielten. Lediglich beim Follow-Up-Test ist der im Mittel erreichte Prozentwert bei den Probandinnen höher (55 %) als bei den Probanden (53,63 %). Die Durchführung einseitiger t-Tests für unabhängige Stichproben zeigen sowohl für den Pre-Diagnosetest, den Post-Test als auch für den Follow-Up-Test, dass sich die Mittelwerte der Geschlechter jedoch nicht signifikant unterscheiden. Die Ergebnisse der t-Tests sind in den nachfolgenden Tabellen 14, 15 und 16 festgehalten.

Tabelle 14: Geschlechterspezifische einseitige t-Tests für unabhängige Stichproben (Pre-Diagnosetest)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Ein Geschlecht hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Pre-Diagnosetest	**männlich**	**weiblich**
Mittelwert (Punkte)	5,69	5,29
Varianz	3,3544	3,8869

t-Statistik	0,99783417
Kritischer t-Wert	1,66235403
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,16054784

Tabelle 15: Geschlechterspezifische einseitige t-Tests für unabhängige Stichproben (Post-Test)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Ein Geschlecht hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Post-Test	**männlich**	**weiblich**
Mittelwert (in %)	61,5	56,31
Varianz	352,2834	355,7038

t-Statistik	1,3740721
Kritischer t-Wert	1,65978227
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,08620104

Tabelle 16: Geschlechterspezifische einseitige t-Tests für unabhängige Stichproben (Follow-Up-Test)

H_0: Die Mittelwerte sind gleich.
H_1: Ein Geschlecht hat einen signifikant höheren Mittelwert.

Post-Test	**männlich**	**weiblich**
Mittelwert (in %)	53,63	55,0
Varianz	324,1887	382,5222

t-Statistik	$-0{,}3614032$
Kritischer t-Wert	1,66039116
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,35928409

Bei allen drei t-Tests unabhängiger Stichproben ist der Betrag des Werts der t-Statistik kleiner als der kritische t-Wert, wodurch die Annahme getroffen wird, die Nullhypothese beizubehalten. Aufgrund dessen, dass die berechnete Wahrscheinlichkeit bei allen Tests größer ist als der Alpha-Wert 0,05, darf die Nullhypothese nicht verworfen werden. Die Mittelwerte der Geschlechter unterscheiden sich also weder beim Pre-Diagnosetest, noch beim Post- bzw. Follow-Up-Test signifikant (DATAtab, 2023b).

7.2.5. Konsistenten und Veränderungen zwischen Post- und Follow-Up-Test

Das arithmetische Mittel aller Klassen hat sich vom Post-Test zum Follow-Up-Test verschlechtert. Beim Post-Test erreichten die Schüler:innen im Mittel 61 %, beim Follow-Up-Test jedoch nur mehr 58 %. Wird hingegen das Ergebnis der 7A des BRG Gröhrmühlgasse beim Follow-Up-Test außer Acht gelassen, so bleibt der durchschnittliche erreichte Prozentwert bei beiden Tests gleich, nämlich bei 61 %.
Werden die Versuchs- und Kontrollklassen gesondert betrachtet, so liegt bei der Versuchsgruppe (7A des BRG Gröhrmühlgasse ausgenommen) das arithmetische Mittel bei 64 %, was über dem erreichten Gesamtdurchschnitt liegt. Betrachtet man die durchschnittlich erreichten Prozentwerte der einzelnen Versuchsklassen genauer, ist zu erkennen, dass diese sich vom Post- zum Follow-Up-Test etwas verbessert haben bzw. zumindest gleichgeblieben sind. Bei den Kontrollklassen konnte sich lediglich die 7B des BRG Petersgasse verbessern, wohingegen sich die drei weiteren Klassen der Kontrollgruppe im Durchschnitt verschlechterten.

Bereits in den Kapiteln 7.2.2. und 7.2.3 wurde aber mittels einseitiger t-Tests für unabhängige Stichproben gezeigt, dass die Mittelwerte der erreichten Prozentwerte beim Post- bzw. Follow-Up-Test keinen signifikanten Unterschied aufweisen.

Die Ergebnisse des Pre-Diagnose-, Post- bzw. Follow-Up-Tests aller teilnehmenden Klassen sind im untenstehenden Diagramm (Abbildung 7) dargestellt.

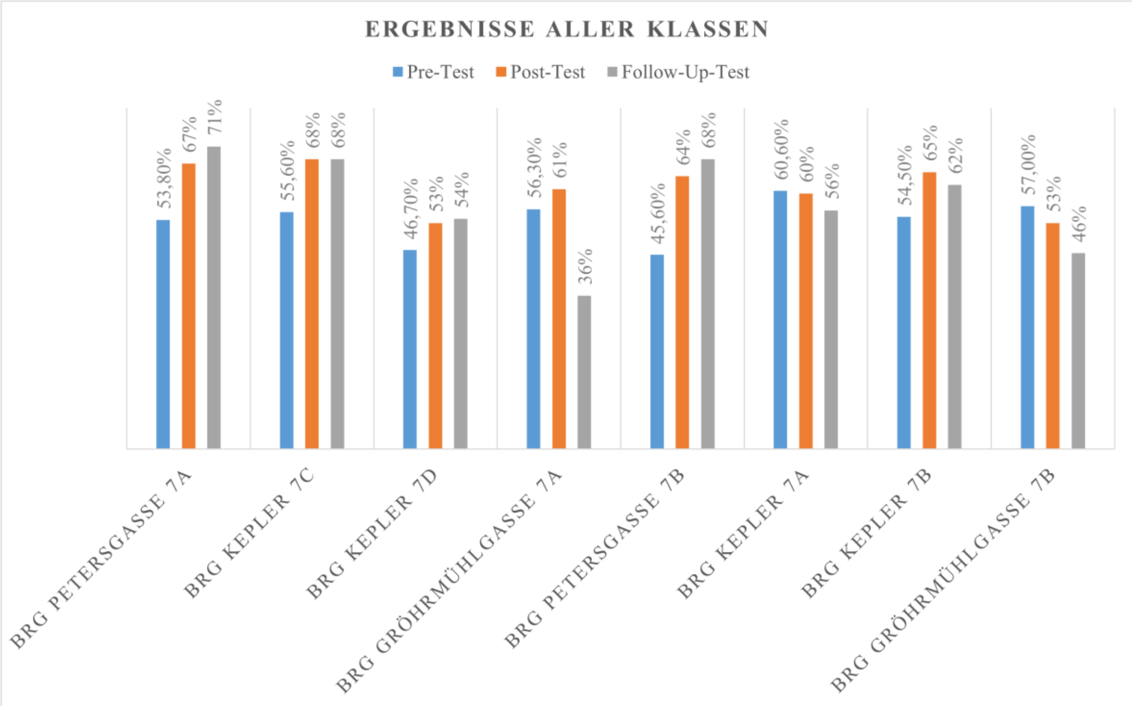


Abbildung 7: Ergebnisse aller Klassen beim Pre-Diagnose-, Post- und Follow-Up-Test

Um die erzielten Ergebnisse der einzelnen Schüler:innen in den Versuchs- und Kontrollklassen zu analysieren, werden nur diejenigen Lernenden berücksichtigt, von denen zumindest Ergebnisse vom Post- und Follow-Up-Test vorliegen.

Sowohl die Proband:innen der Versuchsgruppe, als auch jene der Kontrollgruppe verschlechterten sich vom Post- zum Follow-Up-Test. In den Versuchsklassen erreichten die Heranwachsenden beim Post-Test einen durchschnittlichen Prozentwert von 64,07 %, beim Follow-Up-Test hingegen nur mehr 56,19 %. Eine ähnliche Tendenz ist bei den Teilnehmenden der Kontrollgruppe zu erkennen. Diese verschlechterten sich von im Mittel 56,2 % beim Post-Test auf 51,7 % beim Follow-Up-Test. Um eine Aussage darüber treffen zu können, ob sich die Mittelwerte der erreichten Prozentwerte des Post- bzw.

Follow-Up-Tests der Versuchs- bzw. Kontrollgruppe signifikant unterscheiden, wurde jeweils ein einseitiger t-Test für abhängige Stichproben durchgeführt. Die Ergebnisse dieser t-Tests sind in den Tabellen 17 und 18 veranschaulicht.

Tabelle 17: Einseitiger t-Test für abhängige Stichproben (Versuchsgruppe)

H_0: Mittelwerte bei Post- und Follow-Up-Test sind gleich.
H_1: Mittelwert eines Tests ist signifikant niedriger.

Versuchsgruppe	**Post-Test**	**Follow-Up-Test**
Mittelwert (in %)	64,07	56,19
Varianz	378,2267	272,7273

t-Statistik	2,38020163
Kritischer t-Wert	1,68022998
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,01085053

Tabelle 18: Einseitiger t-Test für abhängige Stichproben (Kontrollgruppe)

H_0: Mittelwerte bei Post- und Follow-Up-Test sind gleich.
H_1: Mittelwert eines Tests ist signifikant niedriger.

Kontrollgruppe	**Post-Test**	**Follow-Up-Test**
Mittelwert (in %)	56,2	51,7
Varianz	330,3598	397,8181

t-Statistik	1,72302155
Kritischer t-Wert	1,66980416
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,04493461

Aufgrund dessen, dass bei beiden durchgeführten t-Tests der Wert der t-Statistik größer als der kritische t-Wert ist, besteht die Annahme zur Verwerfung der Nullhypothese, die besagt, dass die Mittelwerte des erreichten Prozentwertes beim Post- und Follow-Up-Test gleich sind. Außerdem ist Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen, in beiden Fällen niedriger als der Alpha-Wert 0,05, wodurch die Nullhypothese ablehnt und stattdessen die Alternativhypothese angenommen wird (DATAtab, 2023a). Somit ist der durchschnittliche erreichte Prozentwert sowohl in den Versuchs- als auch in den Kontrollklassen signifikant niedriger als beim Post-Test.

Die Ergebnisse der Lernenden der Versuchs- und Kontrollklassen beim Post- und Follow-Up-Test sind im nachfolgenden Diagramm (Abbildung 8) dargestellt.

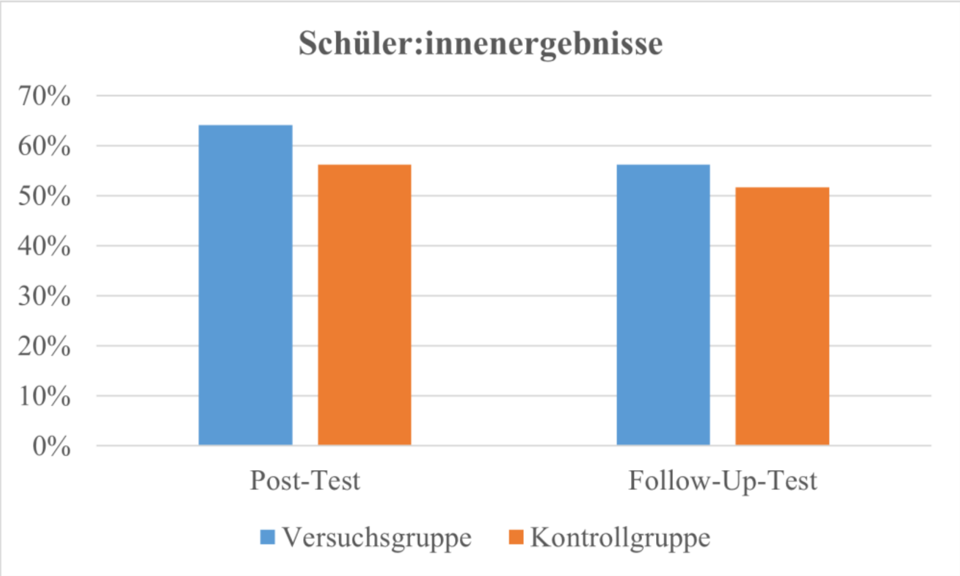


Abbildung 8: Ergebnisse der Schüler:innen beim Post- und Follow-Up-Test

Betrachtet man die geschlechterspezifischen Ergebnisse des Post- bzw. Follow-Up-Tests, können Unterschiede zwischen den männlichen und weiblichen Teilnehmenden ausgemacht werden. Die Schüler erreichten beim Post-Test einen deutlich höheren Mittelwert des erreichten Prozentwertes von 61,59 % als die Schülerinnen, welche lediglich durchschnittlich 56,31 % erreichten. Beim Follow-Up-Test hingegen verschlechterten sich die männlichen Lernenden sehr stark und erzielten nur mehr ein arithmetisches Mittel von 53,63 %, wohingegen die weiblichen etwas besser abschnitten und 55 % erreichten, was nur eine leichte Verschlechterung darstellt. Um beurteilen zu können, ob ein signifikanter Unterschied der Mittelwerte des Post- bzw. Follow-Up-Tests bei den Geschlechtern vorliegt, wurde jeweils ein einseitiger t-Test für abhängige Stichproben für die Männer bzw. Frauen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 19 und 20 ersichtlich.

Tabelle 19: Einseitiger t-Test für abhängige Stichproben (Männer)

H_0: Mittelwerte bei Post- und Follow-Up-Test sind gleich.
H_1: Mittelwert eines Tests ist signifikant niedriger.

Männer	**Post-Test**	**Follow-Up-Test**
Mittelwert (in %)	61,59	53,63
Varianz	363,0906	324,1887

t-Statistik	3,03572773
Kritischer t-Wert	1,67064886
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,00177315

Tabelle 20: Einseitiger t-Test für abhängige Stichproben (Frauen)

H_0: Mittelwerte bei Post- und Follow-Up-Test sind gleich.
H_1: Mittelwert eines Tests ist signifikant niedriger.

Frauen	**Post-Test**	**Follow-Up-Test**
Mittelwert (in %)	56,31	55,0
Varianz	355,7038	382,5222

t-Statistik	0,37724568
Kritischer t-Wert	1,68487512
$\boldsymbol{P(T \leq t)}$ **einseitig**	0,35401808

Bei den Männern ist der Wert der t-Statistik deutlich größer als der kritische t-Wert, wodurch die Annahme besteht, die Nullhypothese abzulehnen. Außerdem ist die berechnete Wahrscheinlichkeit kleiner als der Alpha-Wert 0,05 und somit wird die Nullhypothese, die besagt, dass die Mittelwerte des Post- und Follow-Up-Tests gleich sind, verworfen. Stattdessen wird die Alternativhypothese angenommen und es kann festgehalten werden, dass der Mittelwert des Follow-Up-Tests signifikant niedriger ist als beim Post-Test (DATAtab, 2023a).

Betrachtet man hingegen die Ergebnisse des einseitigen t-Tests bei den Frauen, ist zu erkennen, dass der berechnete Wert der t-Statistik kleiner als der kritische t-Wert ist, wodurch angenommen werden kann, dass die Nullhypothese beibehalten wird. Des Weiteren ist die berechnete Wahrscheinlichkeit größer als der Alpha-Wert 0,05, wodurch die

Nullhypothese nicht verworfen werden darf. Bei den Frauen ist demnach kein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten des Post- und Follow-Up-Tests zu erkennen (DATAtab, 2023a).

Die geschlechterspezifischen Ergebnisse des Post- und Follow-Up-Tests sind im nachfolgenden Diagramm (Abbildung 9) dargestellt.

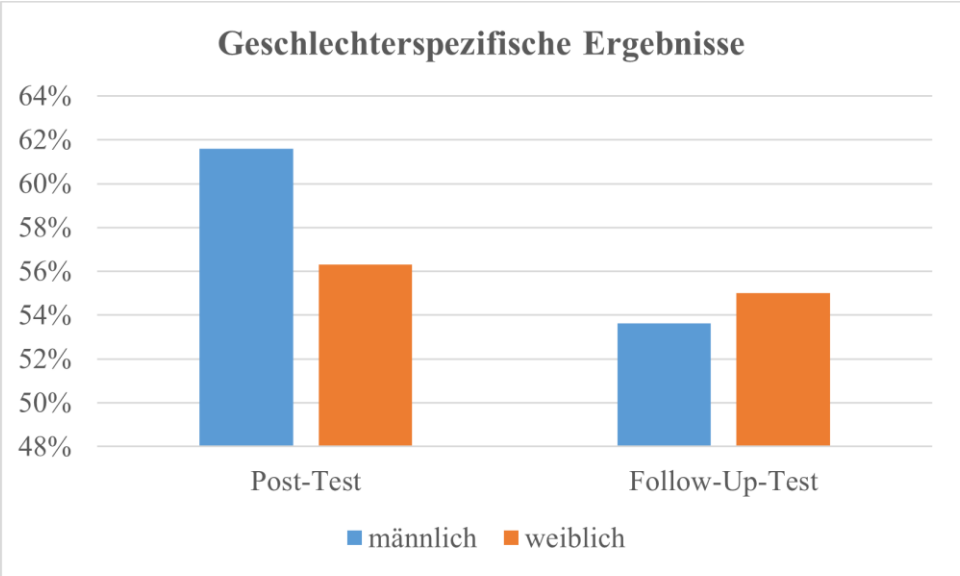


Abbildung 9: Geschlechterspezifische Ergebnisse beim Post- und Follow-Up-Test

Bei der Auswertung der Konsistenten und Veränderungen der Grundvorstellungen wurde zwischen den Grundvorstellungen der Differentialrechnung als lokale Änderungsrate, Tangentensteigung, lokale Linearität sowie einer Mischform, in der zwei oder alle drei Grundvorstellungen gleich stark ausgeprägt sind, unterschieden.

Um die Grundvorstellungen aller Lernenden zu analysieren, wurden jene von 146 Proband:innen beim Post-Test bzw. 127 beim Follow-Up-Test herangezogen. Die Grundvorstellung der Tangentensteigung ist unter allen Teilnehmenden am stärksten vertreten, nämlich bei 64,7 % der Heranwachsenden beim Post- und bei 57,48% beim Follow-Up-Test. Die Mischform und die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate sind im Mittel bei 19,48 % bzw. 14,09 % der Schüler:innen primär. Die Grundvorstellung der lokalen Linearität ist lediglich bei etwa 6 % der Lernenden ausgeprägt. Die Ergebnisse sind im nachfolgenden Diagramm dargestellt.

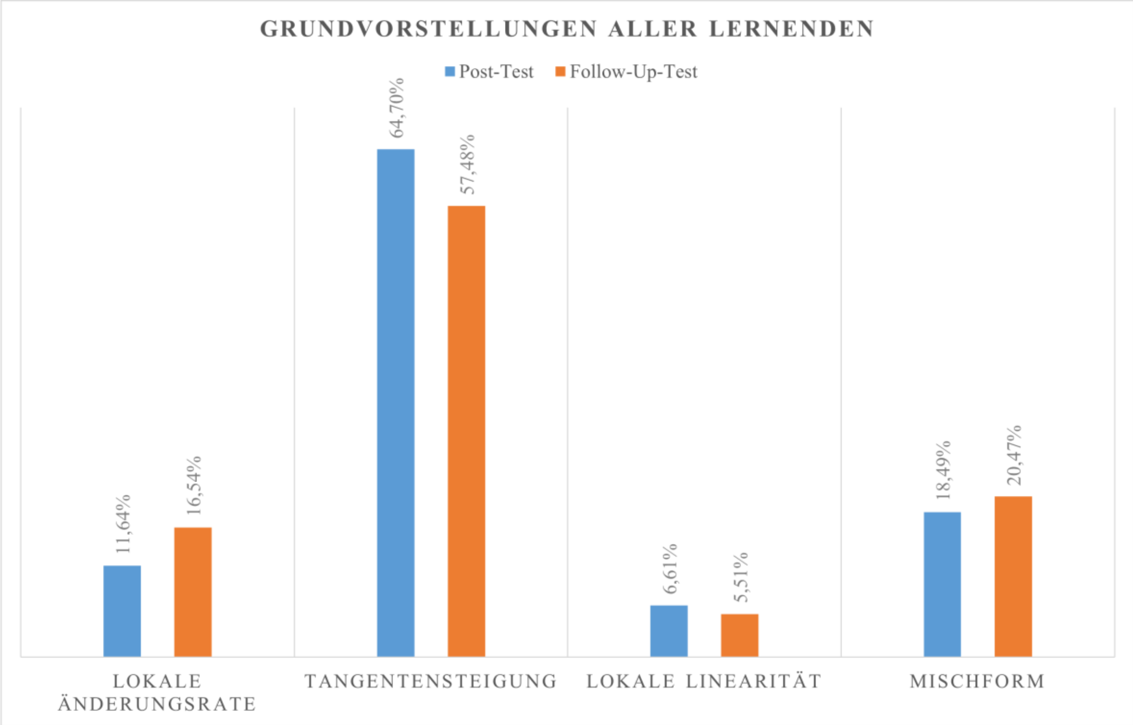


Abbildung 10: Grundvorstellungen aller Lernenden beim Post- und Follow-Up-Test

Um eine mögliche Veränderung der Grundvorstellungen zu analysieren, wurden die Grundvorstellungen von 112 Lernenden verwendet, die sowohl den Post- als auch den Follow-Up-Test geschrieben haben.

Werden die Grundvorstellungen aller Proband:innen der Versuchs- und Kontrollgruppe herangezogen, so haben 43,64 % beim Follow-Up-Test dieselbe primäre Grundvorstellungen wie beim Post-Test. Bei 31,82 % der Heranwachsenden war die Grundvorstellung des Post-Tests beim Follow-Up-Test auch noch vertreten, d. h. dass die Schüler:innen entweder zuerst eine Mischform aufwiesen und sich dann eine der Grundvorstellungen als primär durchsetzte, oder v.v. Bei ca. einem Viertel der Jugendlichen hat sich die Grundvorstellung vollständig gewandelt.
Betrachtet man die Veränderung der Grundvorstellung in Relation zur primären Grundvorstellung beim Post-Test, so kann festgestellt werden, dass die Grundvorstellung der Tangentensteigung am konsistentesten ist. Bei ca. 75 % der Lernenden ist diese beim Follow-Up-Test gleichgeblieben oder zumindest noch vorhanden. Nur bei ca. 25 % der Lernenden änderte sich diese Grundvorstellung. Wurde die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate beim Post-Test als primär identifiziert, so war das beim Follow-Up-Test

nur mehr bei ca. 45 % der Lernenden der Fall. Bei mehr als der Hälfte der Teilnehmenden (ca. 55 %) hat sich diese geändert. Ähnlich ist es bei der Grundvorstellung der lokalen Linearität. Lediglich ein Lernender hatte sowohl beim Post- als auch beim Follow-Up-Test als primäre Grundvorstellung die lokale Linearität. Bei den restlichen ca. 86 %, änderte sich diese vollständig oder es lag beim Follow-Up-Test eine Mischform vor. Wenn beim Post-Test eine Mischform vorlag, so hat sich bis zum Follow-Up-Test eine der vorkommenden Grundvorstellungen durchgesetzt, was bei ca. 81 % der Proband:innen passiert ist. Die Konsistenz bzw. Veränderung der Grundvorstellungen vom Post- zum Follow-Up-Test sind im nachstehenden Diagramm veranschaulicht.

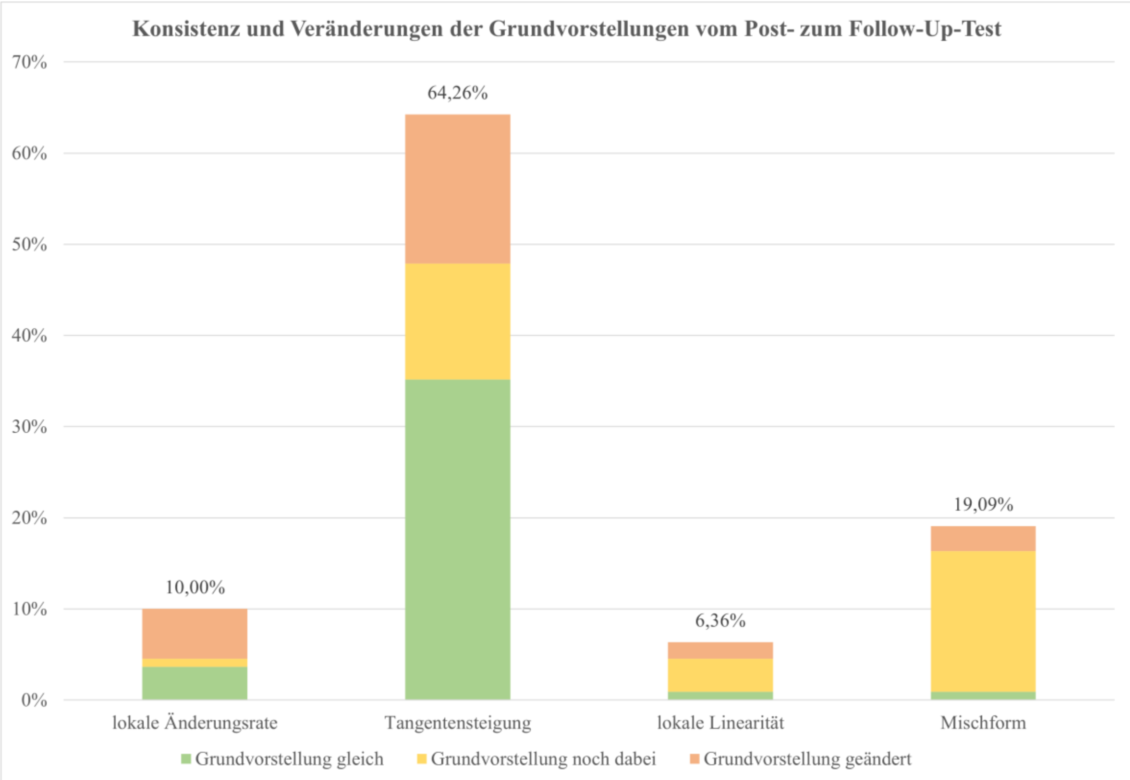


Abbildung 11: Konsistenz und Veränderungen der Grundvorstellungen vom Post- zum Follow-Up-Test

Wie sich die Grundvorstellung (GV) genauer geändert haben, kann aus der nachfolgenden Tabelle 21 entnommen werden. Es wurden folgende Abkürzungen verwendet: lokale Änderungsrate (Ä), Tangentensteigung (T), lokale Linearität (L) und Mischform (Ä,T,L; Ä,T; Ä,L; T,L).

Tabelle 21: Konsistenten und Veränderungen der Grundvorstellungen vom Post- zum Follow-Up-Test

GV Post-Test \ GV Follow-Up-Test	Ä	T	L	Ä,T,L	Ä,T	Ä,L	T,L
Ä	3,66 %	6,1 %	–	–	–	–	–
T	8,54 %	28,05 %	4,88 %	1,44 %	9,76 %	3,66 %	4,88 %
L	1,22 %	–	1,22 %	1,44 %	–	1,44 %	–
Ä,T,L	1,44 %	3,66 %	–	–	–	–	–
Ä,T	1,22 %	3,66 %	–	1,22 %	1,22 %	–	–
Ä,L	–	1,22 %	–	–	–	–	–
T,L	1,22 %	1,44 %	1,22 %	–	1,22 %	–	–

Werden die Daten aus der obigen Tabelle genauer analysiert, kann festgestellt werden, dass sich bei den meisten Lernenden, die beim Post-Test eine Mischform aufwiesen, eine Grundvorstellung durchgesetzt hat. Nur lediglich bei 3,66 % war wiederum eine Mischform zu erkennen. Die Grundvorstellung als lokale Änderungsrate ist die konsistenteste, denn bei 28,05 % der Proband:innen konnte diese sowohl im Post- als auch im Follow-Up-Test als primäre Grundvorstellung identifiziert werden. Auch wenn sich die Grundvorstellung zu einer Mischform verändert hat, ist die Grundvorstellung der Tangentensteigung noch immer bei 16,08 % der Schüler:innen vertreten. Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ist entweder gleichgeblieben, oder sie hat sich in die Grundvorstellung der Tangentensteigung transformiert. Auch die Grundvorstellung der lokalen Linearität ist entweder gleichgeblieben, oder hat sich ich zur Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate bzw. eine Mischform (Ä,T,L oder Ä,L) verändert.

Des Weiteren wurden die Grundvorstellung aller Schüler:innen in Bezug auf die Richtigkeit der gelösten Aufgaben analysiert. Sowohl beim Post- als auch beim Follow-Up-Test wurde die als primäre identifizierte Grundvorstellung bei ca. 95 % der Teilnehmenden verwendet, um eine korrekte Aufgabe zu lösen. Lediglich 5 % aller Lernenden griffen bei richtig gelösten Aufgaben auf eine andere als die primäre Grundvorstellung zurück. Wurde eine Aufgabe jedoch falsch beantwortet, wurde an diese von ca. 19 % der Proband:innen mittels einer anderen Grundvorstellung als der primären herangegangen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 22 und 23 veranschaulicht.

Tabelle 22: Grundvorstellung bei richtig bzw. falsch gelösten Aufgaben (Post-Test)

Post-Test	Primäre Grundvorstellung	Mischform	Andere Grundvorstellung
Aufgabe richtig gelöst	70,34 %	26,21 %	3,45 %
Aufgabe falsch gelöst	38,93 %	18,32 %	42,75 %

Tabelle 23: Grundvorstellung bei richtig bzw. falsch gelösten Aufgaben (Follow-Up-Test)

Follow-Up-Test	Primäre Grundvorstellung	Mischform	Andere Grundvorstellung
Aufgabe richtig gelöst	70,15 %	24,63 %	5,22 %
Aufgabe falsch gelöst	35,65 %	20 %	44,35 %

Vergleicht man die Grundvorstellungen der Versuchs- und Kontrollklassen gesondert, so sind diese beim Post-Test in beiden Gruppen sehr ähnlich. Die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate ist bei ca. 12 %, die Tangentensteigung bei ca. 62 %, die lokale Linearität bei ca. 6 % und eine Mischform bei ca. 20 % der Lernenden ausgeprägt. Beim Follow-Up-Test haben sich die Grundvorstellungen der beiden Gruppen etwas geändert. In den Versuchsklassen konnte sich bei den Mischformen eine Grundvorstellung durchsetzen, wodurch die lokale Änderungsrate und die Tangentensteigung bei mehr Schüler:innen ausgeprägt war. Lediglich die Grundvorstellung der lokalen Linearität konnte auch weiterhin bei ca. 6 % der Schüler:innen festgestellt werden. In der Kontrollgruppe ist der Anteil der Heranwachsenden, bei denen eine Mischform ausgeprägt ist, etwas gestiegen. Außerdem ist der Anteil der Lernenden, bei denen die Grundvorstellung der Tangentensteigung am ausgeprägtesten war, von 64,70 % auf 57,48 % gesunken, wohingegen der Anteil der lokalen Änderungsrate von 11,64 % auf 16,54 % gestiegen ist. Daraus kann geschlossen werden, dass die Grundvorstellungen der Kontrollgruppe nicht so konsistent wie jene in der Versuchsgruppe sind. Die Ergebnisse sind in den folgenden beiden Diagrammen dargestellt.

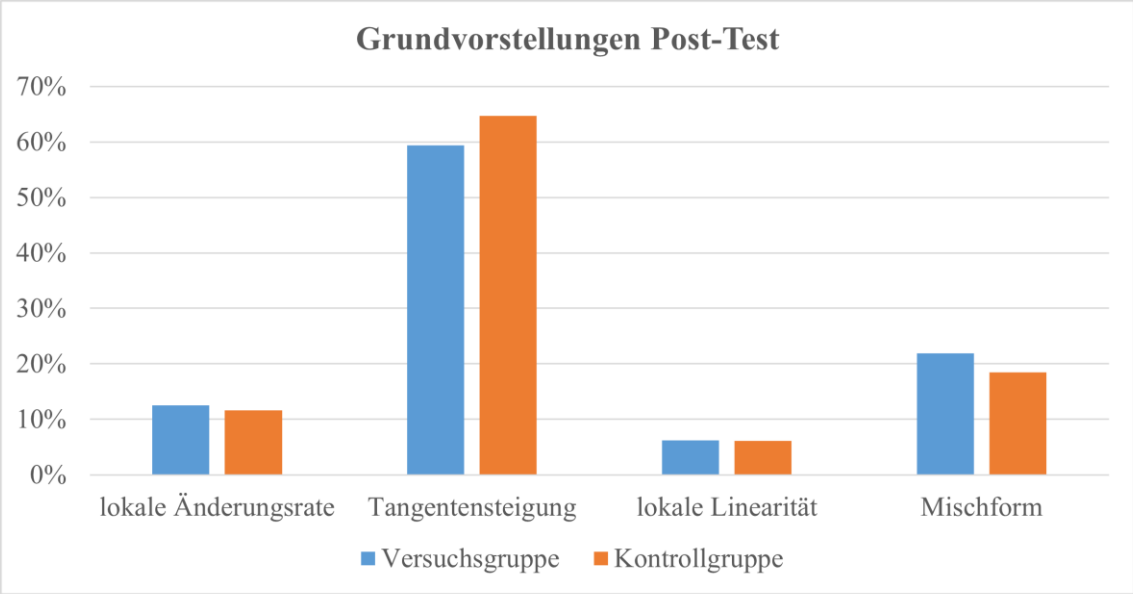


Abbildung 12: Grundvorstellungen beim Post-Test

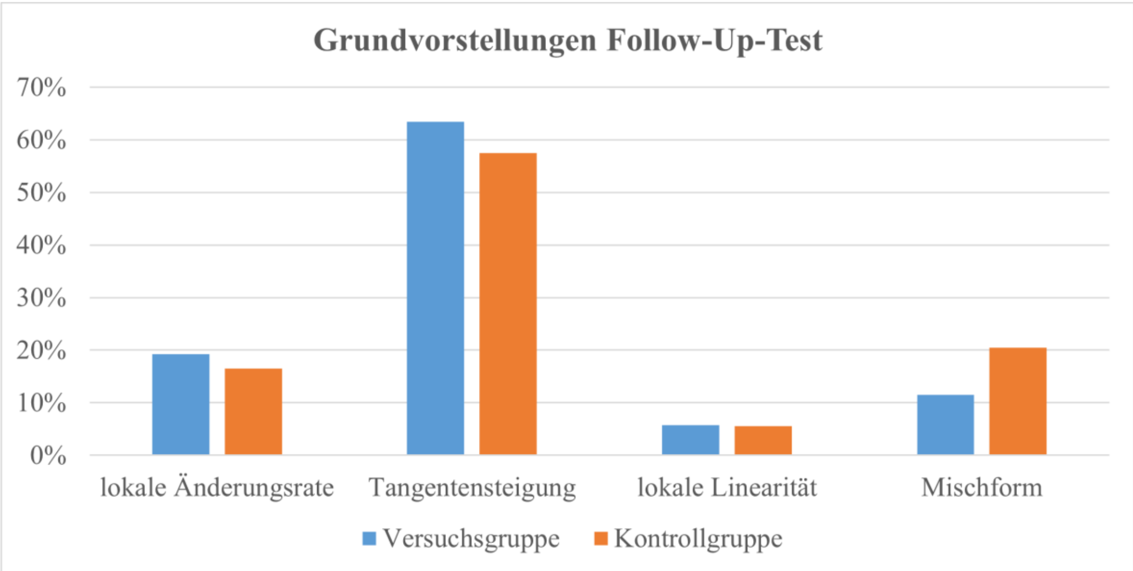


Abbildung 13: Grundvorstellungen beim Follow-Up-Test

Die in diesem Kapitel dargelegten Ergebnisse der Studie werden im Kapitel 8 noch genauer analysiert und diskutiert.

8. Diskussion

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 7.2. dargelegten Ergebnisse der Studie diskutiert.

Die Studie wurde in acht Klassen an drei Realgymnasien in der Steiermark und in Niederösterreich durchgeführt und das Ziel ist es, herauszufinden, ob der im Zuge dieser Masterarbeit entwickelte Lernpfad eine Auswirkung auf den Erwerb und die Nachhaltigkeit von Grundvorstellung im Inhaltsbereich Differentialrechnung an der Sekundarstufe II an allgemeinbildenden höheren Schulen hat. Die teilnehmenden Klassen wurden in die Versuchs- und Kontrollgruppe unterteilt, wobei die Versuchsklassen während der Bearbeitung des Inhaltsbereiches Differentialrechnung mit dem Lernpfad arbeiteten. Die Kontrollklassen hingegen wurden herkömmlich unterrichtet.

Vor der Einführung der Differentialrechnung in den Klassen unterzogen sich die Schüler:innen einem Pre-Diagnosetest. Dieser enthielt Aufgabenstellungen zu mathematischen Inhalten, welche die Basis für den Bereich der Differentialrechnung darstellen. Im Durchschnitt erreichten die Heranwachsenden einen Wert von 53,8 %. Das arithmetische Mittel der Versuchsklassen lag etwas unter dem Durchschnitt bei 53,1 %, während die Kontrollklassen etwas darüber bei 54,4 % lagen. Obwohl die Proband:innen verschiedene Schulen in zwei Bundesländern besuchen und von unterschiedlichen Lehrpersonen unterrichtet werden, konnte mittels eines einseitigen t-Tests für unabhängige Stichproben festgestellt werden, dass sich die Mittelwerte der beiden Gruppen nicht signifikant unterscheiden. Dadurch ist die Vergleichbarkeit der Versuchs- und Kontrollgruppe gegeben und es konnte ermittelt werden, dass alle Lernenden der teilnehmenden Schulen in etwa auf demselben mathematischen Niveau sind.

Im Anschluss an die Durchführung des Pre-Diagnosetests erfolgte die Einführung des Inhaltsbereichs Differentialrechnung im Mathematikunterricht. Dabei wurden die Versuchsklassen mittels eines Lernpfads unterstützt, während die Kontrollklassen auf konventionelle Weise unterrichtet wurden. Ziel war es, mittels des Post- und Follow-Up-Tests Unterschiede in den Leistungen und erworbenen Grundvorstellungen der beiden Gruppen aufzuzeigen.

Beim Post-Test erzielten die Lernenden im Schnitt eine Punktzahl von 61 %, was im Vergleich zum arithmetischen Mittel des Pre-Diagnosetests etwas höher liegt. Dies könnte damit zusammenhängen, dass der Post-Test unmittelbar nach der Behandlung des Differentialrechnungsinhalts im Unterricht durchgeführt wurde und somit die neu erworbenen Kenntnisse bei den Teilnehmer:innen noch präsent waren. Im Gegensatz dazu wurde der Pre-Diagnosetest zu Beginn des Schuljahres ausgeführt, ohne dass die Inhalte des Tests zuvor wiederholt wurden.

Die Proband:innen der Versuchsgruppe erzielten beim Post-Test im Durchschnitt einen etwas höheren Prozentsatz (62,25 %) als die Kontrollgruppe (60,41 %). Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass der Einsatz des Lernpfades zumindest einen geringen positiven Effekt auf die Leistungen der Schüler:innen haben könnte, jedoch konnte aufgrund des Ergebnisses des einseitigen t-Tests für unabhängige Stichproben keine genaue Aussage über die Wirkung des Lernpfades getroffen werden. Dass sich die Resultate beim Post-Test der Versuchs- und Kontrollklassen nicht signifikant unterscheiden, könnte möglicherweise daran liegen, dass es keine genauen Vorgaben zum Einsatz des Lernpfades gab und die Lehrpersonen selbst entscheiden konnten, an welchen Stellen und in welcher Intensität dieser im Unterricht eingesetzt wurde. Außerdem hängen die Leistungen der Jugendlichen auch mit der Qualität des herkömmlichen Unterrichts der jeweiligen Klassenlehrperson zusammen. Daher lässt sich im Nachhinein schwer feststellen, ob der Erwerb des mathematischen Wissens auf den Einsatz des Lernpfades zurückzuführen ist.

Beim Vergleich der vorherrschenden Grundvorstellungen der Lernenden der Versuchs- und Kontrollklassen beim Post-Test konnte kaum ein Unterschied festgestellt werden, da bei fast allen Klassen die Tangentensteigung als primäre Grundvorstellung identifiziert wurde. Nur in einer Versuchsklasse, der 7A des BRG Gröhrmühlgasse, konnte die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate als vorherrschend festgestellt werden. Ob dies auf den Einsatz des Lernpfades oder auf den Unterricht der Lehrperson zurückzuführen ist, konnte durch die Ergebnisse des Post-Tests jedoch nicht festgestellt werden. Dass die Grundvorstellung der Differentialrechnung als Tangentensteigung in fast allen Klassen am ausgeprägtesten ist, könnte damit zusammenhängen, dass diese durch die einfache Möglichkeit der Visualisierung für die Heranwachsenden am besten greifbar ist. Im Gegensatz dazu erfordern die anderen beiden Grundvorstellungen möglicherweise den Einsatz technischer Hilfsmittel oder sind schwerer durch Abbildungen in Schulbüchern zu veranschaulichen, um diese den Schüler:innen zu vermitteln.

Auch im Follow-Up-Test schnitt die Versuchsgruppe mit einem Ergebnis von 64 % etwas besser ab als die Kontrollgruppe mit 58 %. Das Ergebnis der 7A Klasse des BRG Gröhrmühlgasse wurde hierbei außer Acht gelassen, da in dieser Klasse aufgrund von Internetproblemen nur die Ergebnisse von zwei Schüler:innen vorlagen, wodurch diese nicht aussagekräftig waren. Die etwas höheren Ergebnisse der Versuchsklassen lassen darauf schließen, dass das erworbene Wissen der Proband:innen nachhaltiger ist als in den Kontrollklassen. Möglicherweise konnte dies durch den Einsatz des Lernpfades erreicht werden, da dieser zahlreiche Visualisierungen und Möglichkeiten zum selbstständigen Entdecken bietet, was den individuellen Wissenserwerb fördert und durch eigenständigen Wissenserwerb können nachhaltigere Kenntnisse erreicht werden (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 20). Ein einseitiger t-Test für unabhängige Variablen zeigt jedoch, dass sich die Mittelwerte des Follow-Up-Tests der Versuchs- und Kontrollklassen nicht signifikant unterscheiden. Daher bleiben die obigen Aussagen lediglich Vermutungen.

Beim Follow-Up-Test konnte auch keine Unterschiede bei den Grundvorstellungen feststellen werden, da in allen Klassen der Versuchs- und Kontrollgruppe die Tangentensteigung als primäre Grundvorstellung identifiziert wurde. Dies könnte jedoch erneut damit zusammenhängen, dass diese Grundvorstellung für die Schüler:innen aufgrund ihrer leichten Veranschaulichung am besten verständlich ist, wie bereits zuvor erwähnt wurde.

Werden die Resultate des Post- und Follow-Up-Tests aller Teilnehmenden verglichen, konnte festgestellt werden, dass sich die durchschnittlichen Ergebnisse sowohl bei den Schüler:innen der Versuchs- als auch Kontrollgruppen verschlechtert haben. Einseitige t-Tests für abhängige Stichproben ergaben zudem, dass die Mittelwerte in beiden Gruppen vom Post- zum Follow-Up-Test signifikant abgenommen haben. Dies lässt sich höchstwahrscheinlich darauf zurückführen, dass der Follow-Up-Test direkt nach den Weihnachtsferien durchgeführt wurde und die Schüler:innen eine Zeit lang nicht mit dem Thema Differentialrechnung konfrontiert waren. Trotzdem könnte das im Mittel höhere Ergebnis der Versuchsgruppe (+ 4,49 %) ein Hinweis dafür sein, dass durch den Einsatz des Lernpfades der individuelle Wissenserwerb nachhaltigere mathematische Kenntnisse im Bereich Differentialrechnung begünstigt hat. Ein einseitiger t-Test für unabhängige Variablen ergab jedoch, dass die Mittelwerte der Versuchs- und Kontrollgruppen beim Follow-Up-Test nicht signifikant voneinander abweichen. Somit konnte die Vermutung über den positiven Effekt des Lernpfades durch die Studie nicht belegt werden.

Bei der Untersuchung der Konsistenz und Veränderung der Grundvorstellungen vom Post- zum Follow-Up-Test wurde festgestellt, dass die Schüler:innen auch im Follow-Up-Test die Grundvorstellung der Tangentensteigung am stärksten ausgeprägt hatten. So behielten 28,05 % der Lernenden diese bzw. bei weiteren 16,08 % war diese nach wie vor in einer Mischform ausgeprägt. Die Grundvorstellungen der lokalen Änderungsrate und der lokalen Linearität waren dagegen bei nur einem geringen Anteil (3,66 % bzw. 4,1 %) der Lernenden konsistent oder zumindest noch in einer Mischform vorhanden. Daraus kann geschlossen werden, dass die Grundvorstellung der Tangentensteigung nicht nur am ausgeprägtesten, sondern auch am konsistentesten bei den Heranwachsenden ist. Interessanterweise wechselten Proband:innen, bei denen kurzfristig die lokale Änderungsrate als primäre Grundvorstellung identifiziert wurde, über einen längeren Zeitraum zur Grundvorstellung der Tangentensteigung. Dies war bei ca. zwei Drittel der Jugendlichen der Fall und liegt wahrscheinlich daran, dass beide Grundvorstellungen auf dem Aspekt des Grenzwertes des Differenzenquotienten beruhen. Bei Lernenden, bei denen die lokale Linearität am stärksten ausgeprägt war, fand dagegen kein Wechsel zur Grundvorstellung der Tangentensteigung statt, sondern lediglich zur lokalen Änderungsrate oder einer Mischform. Dies ist ein interessantes Ergebnis, da sowohl die Grundvorstellung der lokalen Linearität als auch jene der Tangentensteigung auf dem Aspekt der lokalen linearen Approximation beruhen, die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate aber nicht (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 147).

Bei der Analyse der primären Grundvorstellungen konnte festgestellt werden, dass die Versuchsgruppe konsistenter war als die Kontrollgruppe. In den Versuchsklassen konnte sich bei den Schüler:innen, die im Post-Test eine Mischform aufwiesen, im Follow-Up-Test eine klare Grundvorstellung etablieren. Im Gegensatz dazu wechselten in der Kontrollgruppe mehr Lernende von einer primären Grundvorstellung zu einer Mischform, was darauf hindeutet, dass die Grundvorstellungen in dieser Gruppe nicht so stabil waren wie in der Versuchsgruppe. Es konnte jedoch durch die Studie nicht belegt werden, dass dies auf den Einsatz des Lernpfades zurückzuführen ist, weil beispielsweise die Intensität der Nutzung nicht berücksichtigt wurde.

Ein interessantes Ergebnis ist, dass mehr als 70 % der Lernenden sowohl beim Post- als auch beim Follow-Up-Test bei den korrekt gelösten Aufgaben auf ihre primäre identifizierte Grundvorstellung oder eine Mischform davon zurückgriffen. Lediglich etwa 5 % verwendeten eine andere Grundvorstellung, um Aufgaben korrekt zu lösen. Bei falsch gelösten Aufgaben griffen jedoch nur noch etwa 37 % der Jugendlichen auf ihre primäre Grundvorstellung zurück, während über 60 % eine andere Grundvorstellung oder eine Mischform verwendeten. Dies unterstreicht die Bedeutung des Mathematikunterrichts bei der nachhaltigen Entwicklung und Festigung von Grundvorstellungen, die für das Lösen mathematischer Probleme wesentlich sind und im Gedächtnis der Schüler:innen verankert werden sollten.

Weiterhin wurden die Ergebnisse der Teilnehmerinnen und Teilnehmer nach Geschlecht analysiert. Dabei ergab sich, dass die männlichen Probanden sowohl beim Pre-Diagnosetest als auch beim Post-Test im Durchschnitt bessere Ergebnisse erzielten als die weiblichen Teilnehmerinnen. Lediglich beim Follow-Up-Test waren die Durchschnittswerte beider Geschlechter etwa gleich. Eine statistische Überprüfung mittels einseitiger t-Tests für unabhängige Stichproben ergab jedoch, dass die Unterschiede zwischen den Geschlechtern bei keinem der Tests signifikant waren. Daher kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob eines der Geschlechter signifikant bessere Ergebnisse erzielt hat als das andere.

Die geschlechterspezifischen Ergebnisse der Studie wurden auch insbesondere in Bezug auf die Konsistenz und Veränderungen der Ergebnisse zwischen dem Post- und Follow-Up-Test untersucht. Zu Beginn erzielten die männlichen Teilnehmer im Durchschnitt einen höheren Prozentsatz an richtigen Antworten (61,5 %) als die Teilnehmerinnen (56,3 %), aber beim Follow-Up-Test verbesserten sich die Ergebnisse der Frauen (55 %) im Vergleich zu den Männern (53,63 %). Obwohl beide Geschlechter im Durchschnitt schlechtere Ergebnisse erzielten, ergab die Analyse durch einseitige t-Tests für abhängige Variablen, dass sich die Ergebnisse der Schüler signifikant verschlechterten, während die der Schülerinnen nicht signifikant betroffen waren. Diese Resultate deuten darauf hin, dass männliche Heranwachsende zwar kurzfristig bessere Ergebnisse erzielen, weibliche hingegen langfristig gesehen nachhaltiger lernen. Es ist jedoch unklar, ob dies ein allgemeines Phänomen ist und weitere Forschung ist erforderlich, um dies zu bestätigen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass durch die Studie leider keine eindeutigen Schlüsse gezogen werden können, ob durch den Einsatz des Lernpfades im Inhaltsbereich Differentialrechnung nachhaltigere Grundvorstellungen aufgebaut werden können und die Schüler:innen dadurch bessere Ergebnisse im Mathematikunterricht erzielen.

Teil IV: Schluss

9. Conclusio

9.1. Fazit

Seitdem der Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln im Mai 2018 bei der schriftlichen Zentralmatura in Mathematik verpflichtend eingeführt wurde, ist die Technologie nicht mehr aus dem Mathematikunterricht wegzudenken (Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2019).

Die kostenlose Geometriesoftware GeoGebra ist ein Computerprogramm, das die Anforderungen eines elektronischen Hilfsmittels erfüllt und wird deswegen an vielen Schulen in Österreich in den Mathematikunterricht integriert. Durch die Möglichkeit, unterschiedliche mathematische Bereiche wie Geometrie, Algebra, Tabellen, etc. zu kombinieren und parallel verfügbar zu machen, bietet eine solche Software zahlreiche Vorteile (GeoGebra, 2023a). Dazu zählen u. a. das Herstellen von Verbindungen der verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten mathematischer Objekte, Förderung des entdeckenden Lernens, Auslagerung von Rechenarbeit und größeres Interesse und Motivation der Heranwachsenden (u. a.: Kaenders & Schmidt, 2001; Neumann, 2018, S. 18; Lindner, 2015, S. 16; Emaikwu & Abari, 2015). Trotz der zahlreichen Vorzüge, die das Programm mit sich bringt, dürfen die Nachteile nicht außer Acht gelassen werden. Durch einen zu intensiven Einsatz kann es beispielsweise passieren, dass sich die Jugendlichen zu sehr auf die Technologie verlassen und so ihre mathematischen Fähigkeiten vernachlässigen (Neumann, 2018, S. 18f.). Des Weiteren kann eine unreflektierte Verwendung der Technologie dazu führen, dass die Schüler:innen Ergebnisse übernehmen, ohne diese kritisch zu hinterfragen, wodurch sich mathematisches Unverständnis etablieren kann und in weiterer Folge mathematische Konzepte ohne adäquate Vorstellungen entwickelt werden (Majerek, 2014, S. 51f.).

Diese Vorstellungen hinter mathematischen Inhalten sind jedoch unverzichtbar für die Allgemeinbildung, weswegen sie als Grundvorstellungen bezeichnet werden (Malle, o. J.). Deswegen ist es essentiell, dass die Lernenden tragfähige Grundvorstellungen erwerben, da diese unverzichtbar für das mathematische Problemlösen und das Anwenden von Mathematik sind und nur durch den Aufbau dieser kann das Verstehen mathematischer Inhalte ermöglicht werden (Lechner, o. J., S. 12f.).

Auch im Inhaltsbereich Differentialrechnung in der Sekundarstufe II an allgemeinbildenden höheren Schulen ist der Einsatz technischer Hilfsmittel nicht mehr wegzudenken und durch reflektierte Zugänge kann die Verwendung die Lernenden unterstützen, die Grundvorstellungen zum Inhaltsbereich Differentialrechnung aufzubauen. Die didaktische Literatur beschränkt sich hierbei auf drei wesentliche Grundvorstellungen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2021, S. 6):

1. Lokale Änderungsrate: Die Ableitung gibt die lokale Änderungsrate einer Größe an.
2. Tangentensteigung: Die Ableitung gibt die Steigung der Tangente an den Graphen an einer Stelle an.
3. Lokale Linearität: Der Graph einer Funktion ist lokal näherungsweise linear.

Um nachhaltige Grundvorstellungen bei den Lernenden aufzubauen, können Lernpfade im Mathematikunterricht eingesetzt werden. Unter einem Lernpfad versteht man eine dynamische, computergestützte Lernumgebung, in der sich Schüler:innen handlungsorientiert, selbsttätig und eigenverantwortlich mit mathematischen Inhalten auseinandersetzen und durch die regelmäßigen Aufforderungen zum Formulieren von Vermutungen, Experimentieren, Argumentieren, Reflektieren und Protokollieren der Ergebnisse wird der Erwerb tiefgreifender Grundvorstellungen gefördert (Roth, Süss-Stepancik & Wiesner, 2015, S. 6ff.).

Ziel dieser Masterarbeit war die Entwicklung eines Lernpfades zum Inhaltsbereich Differentialrechnung, der den Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Heranwachsenden unterstützt. In einer empirischen Untersuchung wurde letztendlich untersucht, ob der Einsatz dieses Lernpfades einen Einfluss auf die Leistungen und den Aufbau entsprechender Grundvorstellungen bei den Lernenden hat.

Zu diesem Zweck wurde eine quantitative Vergleichsstudie durchgeführt, an der acht Klassen an drei Realgymnasien in der Steiermark und in Niederösterreich teilgenommen haben. Dies ergab eine Anzahl von 181 Proband:innen. Während der Behandlung des Inhaltsbereiches Differentialrechnung arbeiteten die Hälfte der teilnehmenden Klassen mit dem erstellten Lernpfad, wohingegen die restlichen Klassen als Vergleichsgruppe dienten und herkömmlich unterrichtet wurden.

Vor Einführung der Differentialrechnung wurde ein Pre-Diagnosetest durchgeführt, welcher zehn Aufgaben zu notwendigen Voraussetzungen, die die Schüler:innen mitbringen sollten, enthielt. Dadurch wurde der aktuelle Leistungsstand der Lernenden eruiert und die Ergebnisse haben gezeigt, dass alle Teilnehmenden in etwa über dasselbe mathematische Wissen verfügen, wodurch die Vergleichbarkeit der Versuchs- und Kontrollklassen gewährleistet war.

Nachdem der Differentialrechnungsinhalt im Unterricht behandelt worden ist, unterwarfen sich die Schüler:innen dem Post-Test, welcher die erworbenen Grundvorstellungen zur Differentialrechnung erfassen sollte. Dieser Test umfasste sieben Aufgaben zu den wesentlichen Bereichen der Differentialrechnung, wobei den Jugendlichen nach jeder Aufgabe zusätzlich drei Argumentationen zu jeweils einer Grundvorstellung geboten wurden. Die Schüler:innen wurden dann dazu aufgefordert, auf einer vierstufigen Likert-Skala anzugeben, inwieweit die jeweilige Argumentation ihrem eigenen Denken entspricht. Hierbei wurde eine gerade Skalierung gewählt, damit die Proband:innen gezwungen sind, eine Tendenz zu wählen (Novustat, 2023), wodurch deutlich erkennbar ist, ob eine Grundvorstellung bei den Heranwachsenden ausgeprägt ist, oder nicht.

Etwa ein Monat später wurde der Follow-Up-Test durchgeführt, welcher dieselben Aufgaben wie der Post-Test enthielt. Der Zweck dieses Tests bestand darin, die Nachhaltigkeit der erworbenen Grundvorstellungen zu erfassen.

Die Ergebnisanalyse zeigt, dass die Versuchsklassen sowohl beim Post- als auch beim Follow-Up-Test etwas besser abschnitten als die Kontrollklassen, was darauf hindeuten könnte, dass der Einsatz des Lernpfades zumindest einen geringen positiven Effekt auf die Leistungen der Schüler:innen hat. Diese Vermutung konnte jedoch nicht belegt werden, da einseitige t-Tests für unabhängige Stichproben zeigen, dass sich die Mittelwerte beider Gruppen nicht signifikant unterscheiden. Außerdem konnte kaum ein Unterschied der vorherrschenden primären Grundvorstellung der Versuchs- und Kontrollklassen identifiziert werden, da fast alle Klassen mit der Grundvorstellung der Tangentensteigung arbeiteten. Dies hängt höchstwahrscheinlich damit zusammen, dass diese Vorstellung durch die einfache Möglichkeit der Visualisierung für die Heranwachsenden am besten greifbar ist.

Beim Vergleichen der Ergebnisse von Post- und Follow-Up-Test aller Teilnehmenden konnte mittels einseitiger t-Tests für abhängige Stichproben festgestellt werden, dass sich die Mittelwerte beider Gruppen signifikant verschlechtert haben, was wahrscheinlich damit zusammenhängt, dass durch die zweiwöchigen Weihnachtsferien zwischen dem Post- und Follow-Up-Test nicht mehr alle Inhalte präsent waren. Die Analyse der Grundvorstellungen aller Proband:innen bei beiden Tests zeigt jedoch, dass diese in der Versuchsgruppe konsistenter als in der Vergleichsgruppe waren. Wiesen Lernende der Versuchsklassen beim Post-Test eine Mischform auf, so konnte sich bei den meisten beim Follow-Up-Test eine klare Grundvorstellung etablieren. Im Gegensatz dazu wechselten in der Kontrollgruppe mehrere Schüler:innen von einer primär ausgeprägten Grundvorstellung beim Post-Test zu einer Mischform beim Follow-Up-Test, was ein Hinweis dafür ist, dass die Grundvorstellungen in dieser Gruppe nicht so stabil waren. Ob dieser Effekt jedoch auf den Lernpfad zurückzuführen ist, konnte durch die Studie nicht belegt werden.

Interessant ist jedoch, dass mehr als 70 % der Lernenden bei korrekt gelösten Aufgaben auf die als primär identifizierte Grundvorstellung oder eine Mischform inklusive dieser zurückgriffen, während die Teilnehmenden bei Aufgaben, die falsch beantwortet wurden, in über 60 % der Fälle mit einer anderen Grundvorstellung arbeiteten. Dies unterstreicht die Wichtigkeit der Entwicklung und Festigung tragfähiger Grundvorstellungen, die für das Lösen mathematischer Probleme wesentlich sind.

Des Weiteren wurden die Ergebnisse geschlechterspezifisch analysiert und die Resultate deuten darauf hin, dass männliche Lernende kurzfristig bessere Ergebnisse erzielen, die weiblichen Kolleginnen hingegen langfristig gesehen nachhaltiger lernen. Um jedoch festzustellen können, ob dies ein allgemeines Phänomen ist, sind weitere Forschungen notwendig.

Alles in allem hat die Studie jedoch leider keine eindeutigen Resultate geliefert, die belegen, dass durch den Einsatz des Lernpfades die Schüler:innen bessere Leistungen erzielen bzw. nachhaltigere Grundvorstellungen aufbauen konnten.

9.2. Beantwortung der Forschungsfragen

Im Folgenden werden nun die drei Forschungsfragen der Masterarbeit beantwortet.

1. „Inwiefern beeinflusst der Einsatz von GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung den Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Schüler:innen?

Wird das Computerprogramm GeoGebra fachdidaktisch reflektiert im Mathematikunterricht während des Inhaltsbereichs Differentialrechnung eingesetzt, kann der Aufbau nachhaltiger Grundvorstellungen bei den Schüler:innen erleichtert werden. So können Lernende die dynamische Geometriesoftware verwenden, um selbstständig infinitesimale Grenzübergänge durchzuführen oder Funktionen mittels einer „Funktionenlupe" in einer beliebig kleinen Umgebung untersuchen, wodurch durch das eigenständige Entdecken sowohl der Erwerb der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate, als auch der Tangentensteigung und der lokalen Linearität begünstigt werden.

2. „Entwickeln die Schüler:innen durch den Einsatz des erstellten Lernpfades nachhaltigere Grundvorstellungen zur Differentialrechnung?"

Die empirische Untersuchung hat zwar gezeigt, dass die Grundvorstellungen der Proband:innen der Vergleichsgruppe konsistenter sind als jene der Kontrollgruppe, jedoch konnte nicht genau belegt werden, ob dies auf den Einsatz des Lernpfades zurückzuführen ist.

3. „Inwiefern wirkt sich die Verwendung von GeoGebra und des Lernpfades auf die mathematischen Fertigkeiten der Schüler:innen aus?"

Die Ergebnisse des Post- bzw. Follow-Up-Tests haben keine signifikanten Unterschiede zwischen der Versuchs- und Kontrollgruppe gezeigt. Außerdem wurde den Lehrpersonen der Versuchsklassen nicht vorgeschrieben, in welchem Ausmaß und an welchen Stellen sie den Lernpfad im Unterricht einzusetzen haben, wodurch das erworbene Wissen der Schüler:innen zum Inhaltsbereich Differentialrechnung nicht ausschließlich auf die Verwendung des Lernpfades zurückzuführen ist. Des Weiteren wurde die Kontrollgruppe in der Nutzung von GeoGebra nicht eingeschränkt, weshalb keine Schlüsse über die Auswirkung des Einsatzes des Computerprogramms getätigt werden können.

9.3. Ausblick

Die im Zuge dieser Masterarbeit durchgeführte Studie lässt Vermutungen über einen positiven Effekt auf die Leistungen der Schüler:innen und den Aufbau von Grundvorstellungen im Inhaltsbereich Differentialrechnung durch den Einsatz des entwickelten Lernpfades zu.

Jedoch konnten diese Vermutungen durch die empirische Untersuchung nicht bestätigt werden, wodurch weitere Forschungen notwendig sind, um die Auswirkungen des Lernpfades auf die Leistung und den Erwerb von nachhaltigen Grundvorstellungen zu untersuchen. Hierbei würde eine größere Anzahl von Proband:innen benötigt werden, um aussagekräftigere Ergebnisse zu erhalten. Des Weiteren wäre es sinnvoll, den Lehrpersonen genaue Vorschriften zum Einsatz des Lernpfades vorzugeben, um so die Effekte des Lernpfades besser darlegen zu können.

Des Weiteren könnten die Auswirkungen des Einsatzes von Technologie auf den Erwerb von Grundvorstellungen genauer untersucht werden. Der Fokus hierbei könnte liegen, inwiefern digitale Werkzeuge eine Rolle bei der Entwicklung von Grundvorstellung spielen und ob die Einsatz von Technologie effektiver ist, als traditionelle Lehrmethoden.

Ein weiteres interessantes Forschungsgebiet wäre, ob es geschlechterspezifische Unterschiede in der Leistung im Unterrichtsfach Mathematik gibt. Die Frage, ob es stimmt, dass männliche Lernende kurzfristig bessere Ergebnisse erzielen als weibliche Lernende, die langfristig gesehen nachhaltiger lernen, könnte hierbei näher untersucht werden.

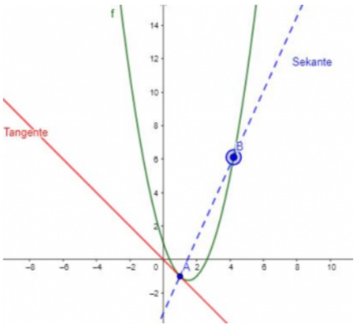
Teil V: Anhang

Anhang 1: Lernpfad zur Differentialrechnung

Lernpfad Differentialrechnung

Autor: Sabrina Stimpfl

Im Zuge der Masterarbeit erstellt von
Sabrina Stimpfl, BEd



Inhaltsverzeichnis

Anwendung der Differentialrechnung

Wirtschaft

Extremwertaufgaben

Weiter
Steigung von Geraden

Steigung von Geraden

Autor: Sabrina Stimpfl, e.alb, Theresa Ebertz, eckerts

Thema: Lineare Funktionen

Die **Steigung m** gibt an, wie stark die Gerade steigt oder fällt. Die Steigung einer Geraden, kann mit einem **Steigungsdreieck** bestimmt werden.

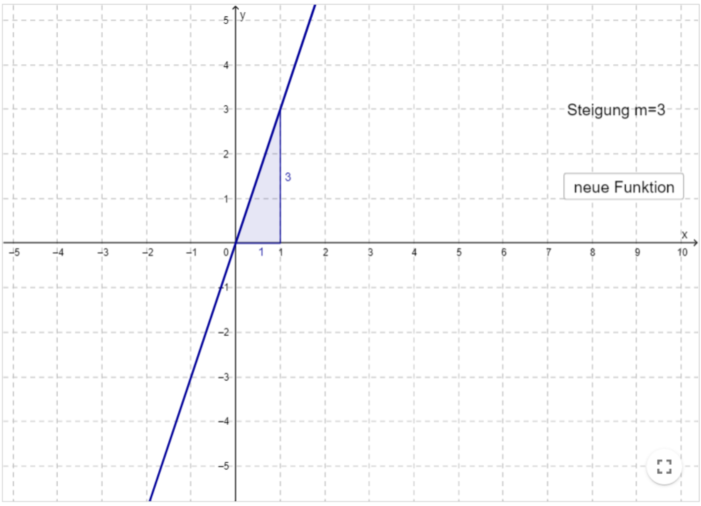
Dazu gehst du vom Ursprung eine Einheit nach rechts. Dann gibt dir die Steigung m an, wie viele Einheiten du nach oben oder unten gehen musst.

Ist die Steigung m=3, musst du 3 Einheiten nach oben gehen.
Ist die Steigung m=-2, musst du 2 Einheiten nach unten gehen.

Aufgabe 1:

In der folgenden Grafik ist ein Graph einer linearen Funktion gegeben. Zusätzlich ist ein Steigungsdreieck eingezeichnet und die Steigung m wird angezeigt. Drückst du auf den Button "neue Funktion", wird eine neue lineare Funktion generiert.

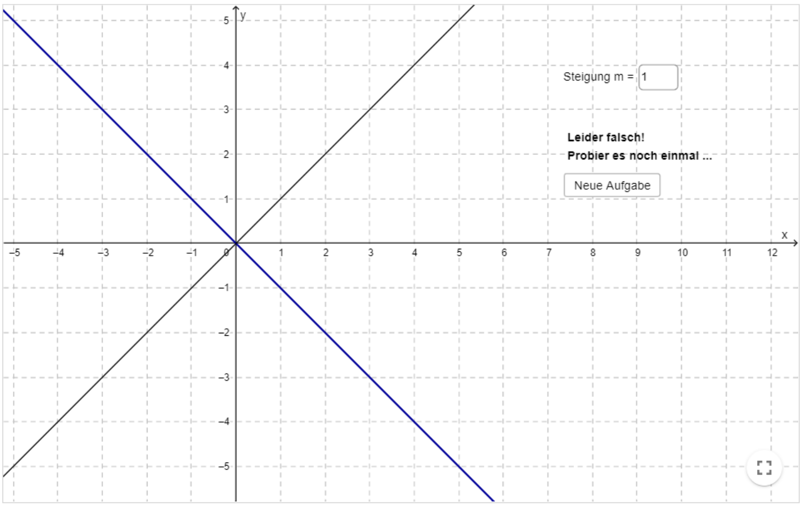
Generiere nun einige lineare Funktionen und versuche nachzuvollziehen, wie das Steigungsdreieck und die Steigung m der Funktion zusammenhängen.



Aufgabe 2:

Jetzt bist du dran!

Lies die Steigung m der linearen Funktionen ab und tippe deine Antwort ein. Drückst du auf Enter, wird dir die Lösung angezeigt. Bestimme die Steigungen von mindestens 5 linearen Funktionen. Indem du auf den Button "Neue Aufgabe" klickst, werden neue Funktionen generiert.



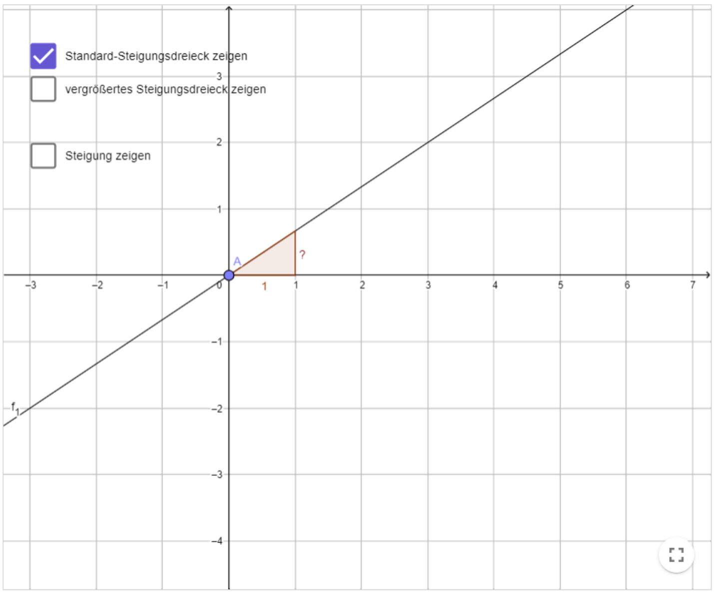
Bis jetzt haben wir ein Steigungsdreieck mit der Breite 1 benutzt. Daran kann man die Steigung der Funktion in viele Fällen aber nicht genau ablesen, wie z.B. bei Aufgabe 3.

Deshalb schauen wir uns ein vergrößertes Steigungsdreieck an.

Aufgabe 3:

In der folgenden Grafik siehst du eine lineare Funktion. Ziel ist es, die Steigung dieser Geraden zu bestimmen. Das Standard-Steigungsdreieck mit der Breite 1 ist bereits eingezeichnet, jedoch kann man die Steigung nicht genau ablesen.

Schalte durch Klicken in die Kontrollkästchen das Standard-Steigungsdreieck aus und das vergrößerte Steigungsdreieck an. Verschiebe nun den Punkt B soweit, bis die Dreiecksseiten ganze Zahlen haben. Beantworte dann die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Auf die wieviel-fache Größe hast du das Standard-Steigungsdreieck vergrößert? (Gib eine Zahl an, z.B. 2 für doppelte Größe)

Aa π

Mögliche Antwort: z.B. 3

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Schaue dir nun die senkrechte Dreiecksseite an. Diese hat sich beim Vergrößern ebenfalls verdreifacht. Wie kannst du dadurch die Steigung bestimmen?

Aa π

Mögliche Antwort: Ich dividiere die Länge der senkrechten Dreiecksseite durch 3.

NEUER VERSUCH

Frage 3:

Formuliere nun eine allgemeine Vorschrift, wie man mithilfe eines beliebigen Steigungsdreiecks die Steigung einer Geraden bestimmen kann.

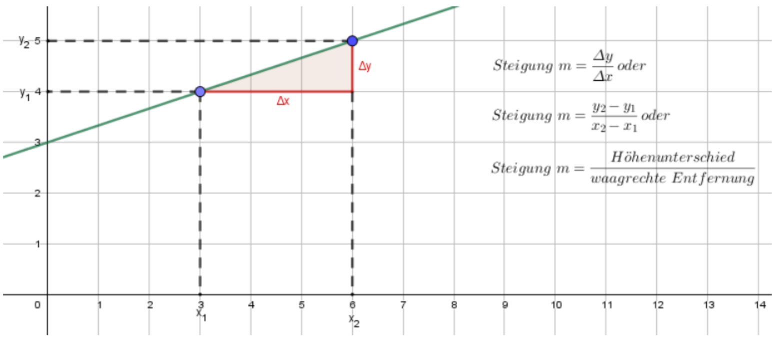
Aa π

Mögliche Antwort: Steigung = Höhenunterschied geteilt durch waagrechte Entfernung

NEUER VERSUCH

Zusammenfassung

In der folgenden Grafik ist noch einmal zusammengefasst, wie die Steigung einer Geraden bestimmt werden kann:



Vorherig
Lernpfad Differentialrechnung

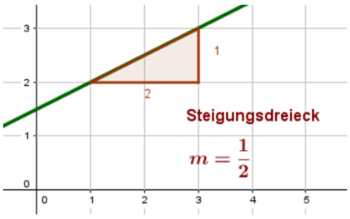
Weiter
Differentialrechnung - WARUM?

Differentialrechnung - WARUM?

Autor: Sabrina Stimpfl, eckerts

Das eigentliche Ziel der Differentialrechnung ist es, auch bei gebogenen Graphen mit dem Begriff *Steigung* arbeiten zu können.

Die Steigung bei Geraden kennst du ja schon:



Jedenfalls ist klar: Bei Geraden ist die Steigung überall gleich (sie sind ja gerade!).

Anders ist das bei gebogenen Graphen:

Da müsste man ja für jeden einzelnen Punkt immer eine andere Steigung angeben. Und geht das dann auch mit einem Steigungsdreieck? Immerhin ist die Linie ja gekrümmt... genau für solche Probleme wurde in der Mathematik die Differentialrechnung entwickelt.

Vorherig
Steigung von Geraden

Weiter
Einstiegsbeispiel

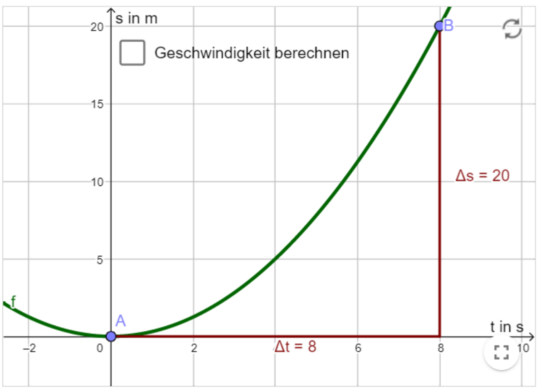
Einstiegsbeispiel

Autor: Sabrina Stimpfl, eckerts

Hier kannst du an einem einfachen Beispiel schon mal sehen, worum es in der Differentialrechnung geht.

Problem:
Ein Zug fährt los (dabei wird er immer schneller) und es soll berechnet werden, welche Geschwindigkeit dieser nach 20 m erreicht hat.

Hier siehst du das Weg-Zeit-Diagramm zu dieser Situation, das wegen der zunehmenden Geschwindigkeit nun keine Gerade mehr ist:



Erster Ansatz:

Wir messen die Zeit, die der Zug für die 20 m benötigt. Das sind 8 s, wie du im Diagramm oben ablesen kannst. Dann rechnen wir: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{20m}{8s} = 2,5\frac{m}{s}$.

So haben wir aber nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt und nicht die momentane Geschwindigkeit am Ende der 20 m. Die müsste größer sein, denn der Zug wird ja die ganze Zeit über schneller. Dieser Ansatz war also nicht wirklich geeignet.

Verbesserter Ansatz:
Das Steigungsdreieck zwischen den Punkten A und B hat uns die Durchschnittsgeschwindigkeit für den gesamten Zeitraum geliefert. Wenn wir einfach nur ein kleines Steigungsdreieck möglichst nahe bei B machen, dann bekommen wir einen besseren Wert.
Das kannst du machen, indem du den Punkt A weiter nach rechts ziehst. Klicke auf das Kontrollkästchen um die Geschwindigkeit automatisch berechnen zu lassen.
Je näher der Punkt A zum Punkt B wandert, desto genauer entspricht der berechnete Wert der tatsächlichen Momentangeschwindigkeit nach 20 Metern.
Müssen wir einfach nur A auf B schieben und haben dann die gesuchte Geschwindigkeit? Versuch's mal!

Der Rechner schreibt ein Fragezeichen hin, kann das also nicht mehr berechnen. Woran liegt das?

Formuliere deine Antwort frei und vergleiche anschließend mit der Musterantwort.

Aa π

Mögliche Antwort: Wenn A auf B liegt, dann sind Δ s und Δ t Null. Dann müsste man also durch Null teilen und das ist verboten.

NEUER VERSUCH

Idee:
Wenn wir mit dem Punkt A "unendlich nahe" an den Punkt B gehen (aber eben nicht ganz da hin), dann bekommen wir die gesuchte Momentangeschwindigkeit. Vielleicht kannst du sie schon erahnen, wenn du A gaaaaanz knapp vor B schiebst...

Da dieses "unendlich nahe herangehen" nicht so leicht fassbar ist, lösen wir uns nun von unserem Einstiegsbeispiel und entwickeln mathematisch einwandfreie Werkzeuge, um einen solchen Annäherungsvorgang exakt in den Griff zu bekommen.

← Vorherig
Differentialrechnung - WARUM?

Weiter
Wiederholung: Differenzenquotient →

Wiederholung: Differenzenquotient

Autor: Sabrina Stimpfl, Michael Frankenstein

Thema: Differenzenquotient und Steigung, Sekante

Bereits in der 6. Klasse hast du dich mit verschiedenen *Änderungen* beschäftigt. *Absolute Änderung, relative* bzw. *prozentuelle Änderung* und die *mittlere (durchschnittliche) Änderung* sollten dir bekannt sein.

Die *mittlere Änderung* berechnet immer die durchschnittliche Steigung pro Einheit in einem Intervall. Sie wird auch als **Differenzenquotient** bezeichnet.

Aufgabe 1:

Kannst du dich noch erinnern, wie der Differenzenquotient berechnet wird?
Formuliere in eigenen Worten, wie du bei der Berechnung des Differenzenquotienten vorgehen würdest. Vergleiche anschließend deine Antwort mit der Musterantwort.

Aa π

Mögliche Antwort: Um den Differenzenquotienten einer Funktion in einem Intervall berechnen zu können, lege ich zuerst eine Gerade (=Sekante) durch die beiden Punkte zu Beginn bzw. am Ende des Intervalls. Da die Steigung einer Geraden überall gleich ist, entspricht die durchschnittliche Steigung der Funktion der Steigung der Geraden in diesem Intervall. Deswegen bestimme ich die Steigung der Geraden.

Dies mach ich entweder durch Einzeichnen eines Steigungsdreiecks oder durch Einsetzen in die Formel des Differenzenquotienten
$k = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

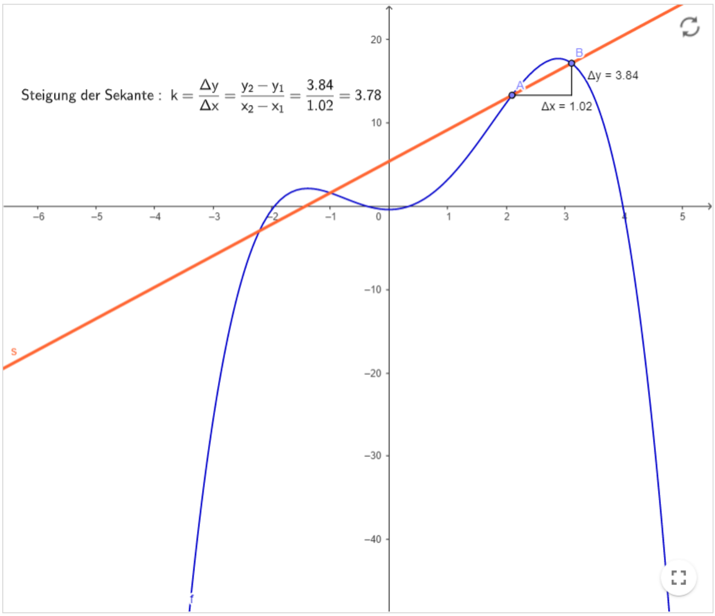
NEUER VERSUCH

Nun wollen wir uns noch die graphische Darstellung des Differenzenquotienten in Erinnerung rufen.

Aufgabe 2:

Verschiebe die beiden Punkte A und B auf der Funktion und beobachte, wie sich dabei die Werte Δy und Δx verändern. Mache dir dabei bewusst, dass Δy/ Δx die Steigung der Sekante ist!

Differenzenquotient



Zusammenfassung

Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Steigung pro Einheit in einem Intervall an. Hierfür berechnen wir die Steigung der Sekante (Gerade durch den Anfangs- bzw. Endfunktionswert des Intervalls).

Was war unser Ziel?

Erinnerst du dich daran, dass wir eigentlich die Steigung der Funktion an einer Stelle berechnen wollten? Wie uns das gelingt, erfährst du im nächsten Kapitel!

← Vorherig
Einstiegsbeispiel

Weiter
Vom Differenzen- zum Differentialquotienten →

Vom Differenzen- zum Differentialquotienten

Autor: Sabrina Stimpfl, Peter Lampert

Wir wissen bereits, dass der Differenzenquotient die *mittlere Änderung* in einem Intervall berechnet. Aber was passiert, wenn wir dieses Intervall beliebig klein machen?

Aufgabe 1:

Formuliere in eigenen Worten, was passieren würde, wenn man das Intervall, indem der Differenzenquotient berechnet wird, immer kleiner macht.

Hinweis: Du kannst Aufgabe 2 als Hilfestellung verwenden!

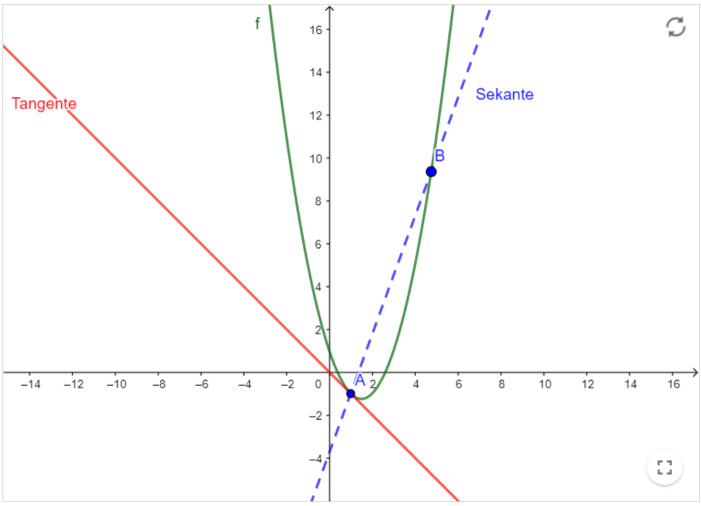
Aa π

Mögliche Antwort: Verkleinert man das Intervall, geht die Sekante (Gerade, die den Funktionsgraphen in zwei Punkten schneidet) in eine Tangente (Gerade, die den Funktionsgraphen in einem Punkt berührt) über.

NEUER VERSUCH

Aufgabe 2:

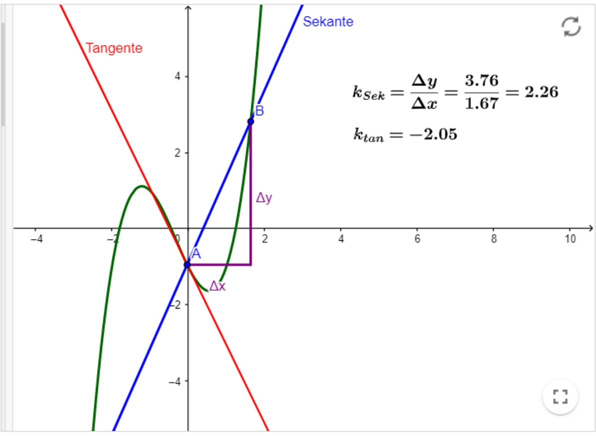
Bewege den Punkt B auf dem Funktionsgraphen immer näher zum Punkt A und beobachte, was mit der Sekante durch die beiden Punkte passiert.



In der obigen Grafik kannst du beobachten, wie die Sekante durch die Punkte A und B in die Tangente im Punkt A übergeht, wenn man das Intervall verkleinert.

Doch was bedeutet das für die Steigung der Sekante?
Bewege hierfür in Aufgabe 3 den Punkt B immer weiter zum Punkt A und vergleiche die Steigung der Sekante k_{sek} *mit der Steigung der Tangente* k_{tan}.

Aufgabe 3:



Wie du in Aufgabe 3 beobachten kannst, nähert sich die Steigung der Sekante immer mehr der Steigung der Tangente an, umso weiter du den Punkt B entlang des Funktionsgraphen zum Punkt A bewegst.

Liegt der Punkt B letztendlich genau über dem Punkt A, ist das Intervall "unendlich klein" und so kann die Steigung der Funktion an einer einzigen Stelle berechnet werden. Der Differenzenquotient wird dann als **Differentialquotient** bzw. **1. Ableitung** bezeichnet.

Dieser *Grenzprozess* ist das Grundprinzip der Differentialrechnung.

Zusammenfassung

Der **Differenzenquotient** berechnet die **durchschnittliche Steigung der Funktionswerte pro Einheit in einem Intervall**. Verkleinert man dieses Intervall, geht der Differenzenquotient über in den Differentialquotienten (=1. Ableitung) und die Steigung der Sekante nähert sich immer weiter der Steigung der Funktion in einem Punkt an.

Du kannst dir den Differentialquotienten an einer Stelle näherungsweise als einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung um diese Stelle vorstellen.

Wir merken uns:
Differentialquotient = 1. Ableitung = Steigung

Vorherig
Wiederholung: Differenzenquotient

Weiter
Ableitung als Änderungsrate

Ableitung als Änderungsrate

Autor: Sabrina Stimpfl, maeder_ruben, eckerts, Martin Rost, Jean-Benedikt Zenhäusern

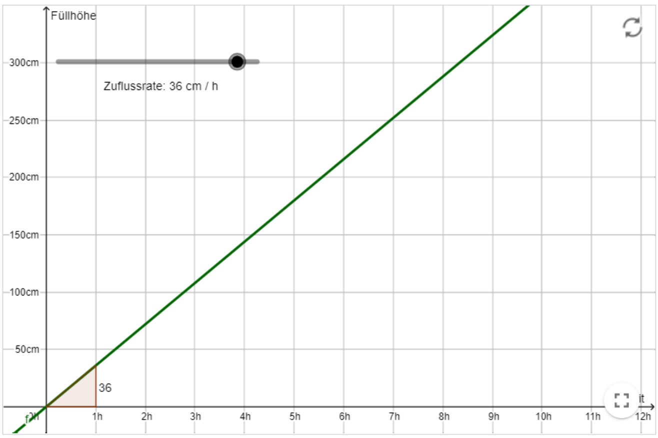
Dass der Differenzenquotient im Kontext als **(mittlere) Änderung** betrachtet werden kann, sollte dir schon bekannt sein.

Genauso ist es auch in vielen Sachzusammenhängen sinnvoll, den Differentialquotienten (1. Ableitung) nicht als Steigung einer Funktion in einem Punkt zu betrachten, sondern sich als **Änderungsrate** vorzustellen.

Was genau das bedeutet, schauen wir uns an einigen Beispielen an.

Aufgabe 1: Wasserstand

Ein Wasserbecken wird gleichmäßig mit Wasser befüllt. Wir betrachten die Füllhöhe (in cm) als Funktion der Zeit. Das heißt, dass auf der x-Achse die Zeit läuft und die y-Achse die Füllhöhe zu jedem Zeitpunkt zeigt.



Die Zuflussrate von 36 cm/h bedeutet, dass sich die Füllhöhe jede Stunde um 36 cm ändert. Das ist also eine **(momentane) Änderungsrate**: Sie gibt an, um wie viel sich die betrachtete Größe (hier die Füllhöhe) in einer Zeiteinheit ändert.

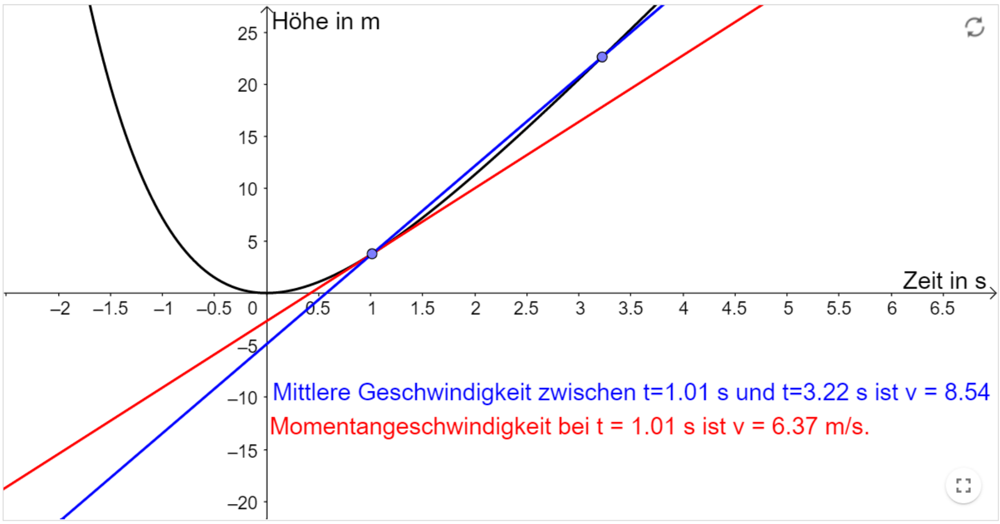
Dass die Änderungsrate genau der Steigung des Funktionsgraphen entspricht, kannst du in der Grafik leicht am Steigungsdreieck erkennen. Auch für größere oder kleinere Zuflussraten gilt dieser Zusammenhang. Das kannst du mithilfe des Schiebereglers ausprobieren.

Merke:
Die (momentane) Änderungsrate entspricht der Steigung $\longrightarrow$ **Änderungsrate = Steigung = 1. Ableitung**

Aufgabe 2:

Im Folgenden siehst du eine Kurve, die das Schaubild einer Funktion $h(t)$ ist, die der Flugzeit t (in Sekunden) die Höhe der Rakete $h(t)$ (in Meter) zuordnet.

Betrachtet man die Definition einer Geschwindigkeit $v = \frac{s}{t}$ ($Geschwindigkeit = \frac{zurückgelegterWeg}{benötigteZeit}$), so ist der Differenzenquotient (= durchschnittliche Steigung pro Einheit in einem Intervall = Steigung der Sekante) in diesem Kontext die durchschnittliche Geschwindigkeit. In der Grafik ist diese in blau eingezeichnet.



Was passiert, wenn man das Intervall des Differenzenquotienten "unendlich klein" macht?

Schiebe hierfür die Punkte am Funktionsgraphen unendlich nahe zusammen. Beschreibe in eigenen Worten, was passiert und vergleiche anschließend mit der Musterantwort.

Aa π

Mögliche Antwort: Betrachtet man die Durchschnittsgeschwindigkeit in einem "unendlich kleinen" Intervall, so handelt es sich eigentlich um die Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt.

NEUER VERSUCH

Es gilt also:

Wird das Zeitintervall, indem die Durchschnittsgeschwindigkeit betrachtet wird, "unendlich klein" gemacht, so berechnen wir nicht mehr die Geschwindigkeit in einem Intervall, sondern die Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt. Hierbei handelt es sich um eine Änderung der Geschwindigkeit in einem Moment. Im Kontext heißt das **Momentangeschwindigkeit**.

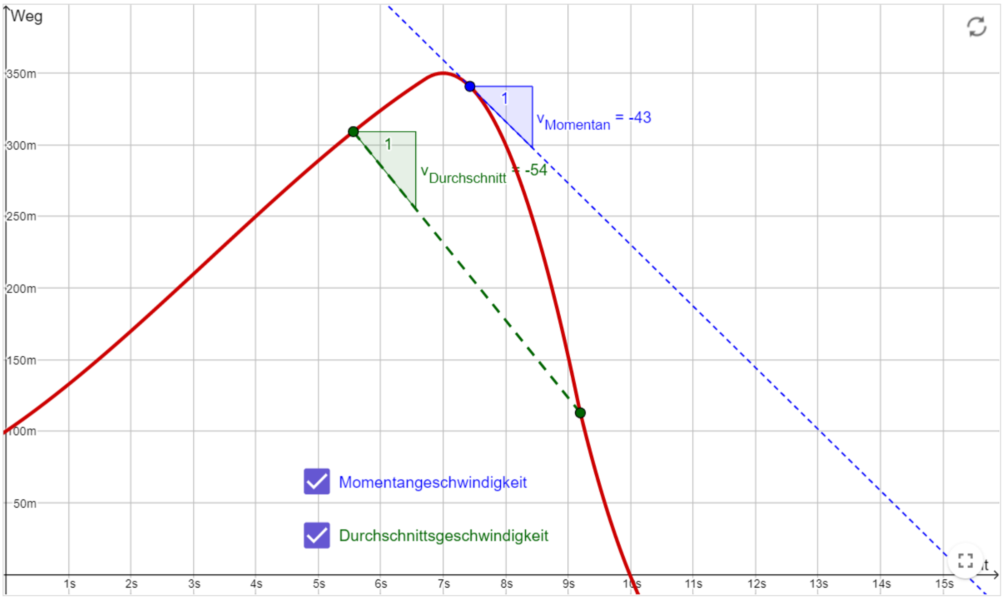
Aufgabe 3:

In der folgenden Grafik ist ein Weg-Zeit-Diagramm gegeben und du kannst den Zusammenhang zwischen durchschnittlicher und momentaner Geschwindigkeit entdecken.

Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist hierbei die Steigung der Sekante (grün) und wird in einem Zeitintervall betrachtet.

Die momentane Geschwindigkeit kann durch die Steigung der Tangente (blau) berechnet werden und gibt die Änderung der Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt an.

Verschiebe nun die Punkte auf dem Funktionsgraphen und untersuche, wie sich die durchschnittliche und momentane Geschwindigkeiten verändern. Beantworte anschließend die Fragen darunter.



Frage 1:

Wann stimmen die durchschnittliche und momentane Geschwindigkeit überein?

Aa π

Mögliche Antwort: Berechnet man die durchschnittliche Geschwindigkeit in einem "unendlich kleinen" Intervall um den Zeitpunkt, an dem die momentane Geschwindigkeit betrachtet wird, stimmen die Durchschnitts- und Momentangeschwindigkeit überein.

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Wie würdest du die Momentangeschwindigkeit im Kontext interpretieren?

Aa π

Mögliche Antwort: Die Momentangeschwindigkeit gibt an, mit welcher Geschwindigkeit man sich zu einem gewissen Zeitpunkt fortbewegt.

NEUER VERSUCH

Frage 3:

An manchen Zeitpunkten ist die momentane Geschwindigkeit negativ. Was könnte das im Kontext bedeuten?

Aa π

Mögliche Antwort: Wenn die momentane Geschwindigkeit negativ ist, heißt das, dass die Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt abnimmt, d.h. es wird gebremst.

NEUER VERSUCH

Zusammenfassung

Werden Funktionen im Kontext betrachtet, also als zeitliche Entwicklung einer Größe interpretiert, kann man die **Ableitung als Änderungsrate** betrachten. Diese Änderungsraten können auch negativ sein, d.h. dass die betrachtete Größe mit der Zeit nicht wächst, sondern abnimmt.

Im Kontext der Geschwindigkeit gibt es die durchschnittliche und momentane Geschwindigkeit. Die **Durchschnittsgeschwindigkeit** gibt den **durchschnittlich zurückgelegten Weg pro Zeiteinheit in einem Zeitintervall** an. Die **Momentangeschwindigkeit** hingegen gibt die **momentane Änderung der Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt** an, d.h. mit welcher Geschwindigkeit wir uns in einem Moment bewegen.

← Vorherig
Vom Differenzen- zum Differentialquotienten

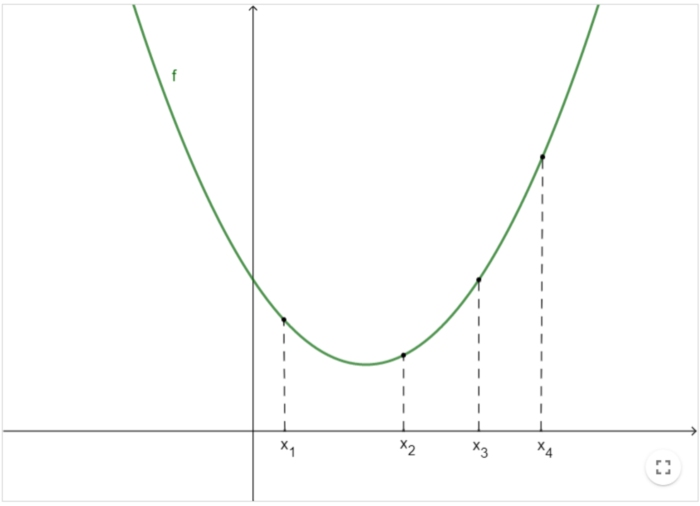
Weiter
Übungsaufgaben →

Übungsaufgaben

Autor: Sabrina Stimpfl, Sebastian Meßlinger

Aufgabe 1:

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades abgebildet. Zusätzlich sind vier Punkte auf dem Graphen mit den x-Koordinaten x_1, x_2, x_3 und x_4 eingezeichnet.



Welche Aussagen treffen auf die Funktion f zu?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_2]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle x_1.

B ☐ Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_3]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle x_3.

C ☐ Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_4]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle x_2.

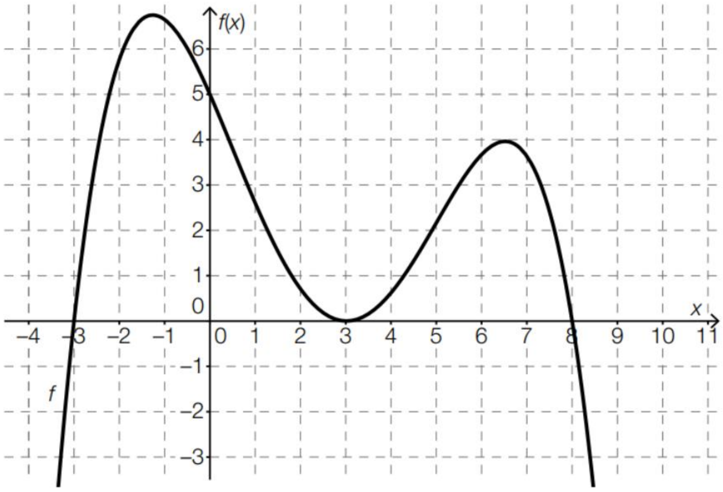
D ☐ Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_2; x_4]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle x_2.

E ☐ Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_3; x_4]$ ist kleiner als der Differentialquotient an der Stelle x_4.

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Aufgabe 2:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f.



Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Der Differentialquotient an der Stelle $x = 6$ ist größer als der Differentialquotient an der Stelle $x = -3$.

B ☐ Der Differentialquotient an der Stelle $x = 1$ ist negativ.

C ☐ Der Differenzenquotient im Intervall $[-3; 0]$ ist 1.

D ☐ Die mittlere Änderungsrate ist in keinem Intervall gleich 0.

E ☐ Der Differenzenquotient im Intervall $[3; 6]$ ist positiv.

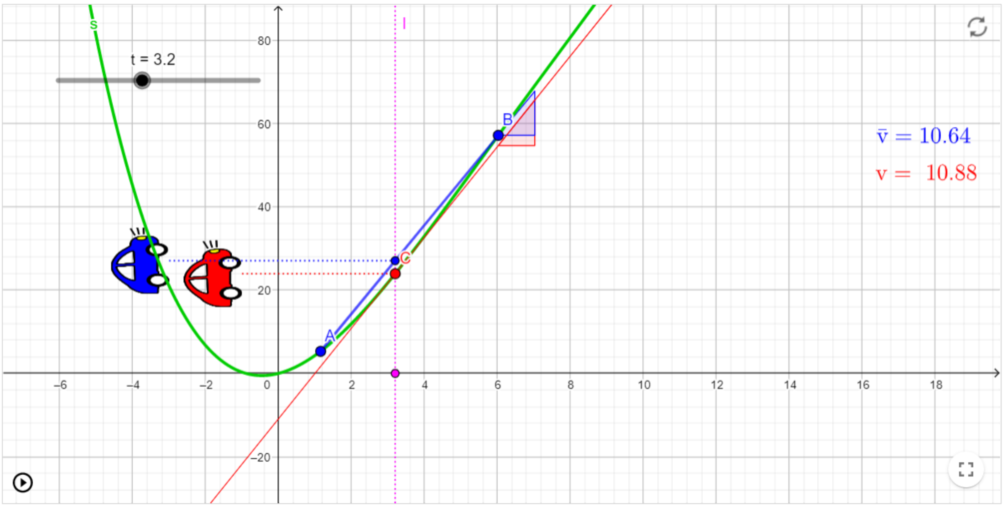
ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Aufgabe 3:

In der folgenden Grafik siehst du eine Funktion, die die Bewegung eines Autos darstellt (grün). Hierbei wird jedem Zeitpunkt (in Sekunden) der zurückgelegte Weg (in Meter) zugeordnet.

In blau wird die Durchschnittsgeschwindigkeit im Intervall zwischen den Punkten A und B angegeben, in rot die Momentangeschwindigkeit im Punkt C, d.h. die Geschwindigkeit zu einem gewissen Zeitpunkt t.

Verschiebe die Punkte am Funktionsgraphen geeignet und kreuze im Anschluss die richtigen Aussagen an.



Kreuze die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Die Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 8 Sekunden entspricht ungefähr 11,85 m/s.

B ☐ Nach 4 Sekunden hat das Auto eine Momentangeschwindigkeit von ungefähr 11,58 m/s.

C ☐ In den ersten 6 Sekunden hatte das Auto eine Durchschnittsgeschwindigkeit von ungefähr 9,47 m/s

D ☐ Die Durchschnittsgeschwindigkeit entspricht in jedem Intervall der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt in der Mitte des jeweiligen Intervalls.

E ☐ Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen 6 und 8 Sekunden entspricht etwa der Momentangeschwindigkeit nach 7 Sekunden.

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

← Vorherig
Ableitung als Änderungsrate

Weiter
Grundvorstellung "Lokale Änderungsrate" →

Grundvorstellung "Lokale Änderungsrate"

Autor: Sabrina Stimpfl

Grundvorstellungen zu "Lokale Änderungsrate"

1) Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z.B. Bewegungsvorgängen).
2) Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt.

← Vorherig
Übungsaufgaben

Weiter
Tangenten in der Differentialrechnung →

Tangenten in der Differentialrechnung

Autor: Sabrina Stimpfl

Im letzten Kapitel haben wir bereits erarbeitet, dass der Differentialquotient die Steigung einer Funktion an einer Stelle berechnet. Als Näherungswert kann man den Differenzenquotient in einem "unendlich kleinen" Intervall betrachten, wobei die Sekante hierbei in eine Tangente übergeht.

Wäre es dann möglich, die Steigung der Funktion in einem Punkt auch **ohne** den Grenzprozess (Differenzenquotient $\longrightarrow$ Differentialquotient) mithilfe der Steigung einer Tangente zu bestimmen?

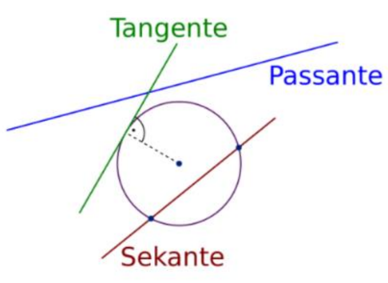
Bevor wir dieser Frage nachgehen, wollen wir uns zuerst überlegen, wie genau eine Tangente überhaupt definiert ist.
Formuliere in eigenen Worten, wie eine Tangente definiert ist und vergleiche anschließend mit der Musterantwort.

Aa π

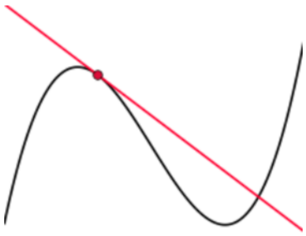
Mögliche Antwort: Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt.

NEUER VERSUCH

Tangenten sind uns primär aus der Unterstufe bekannt, als wir uns mit dem Kreis beschäftigt haben. Erinnerst du dich noch?



In der Differentialrechnung wollen wir nun Tangenten auch an Kurven einzeichnen. Das könnte dann in etwa so aussehen:

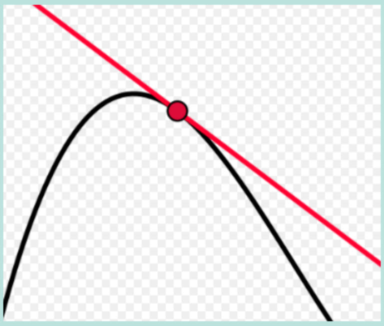


Passt dies noch immer mit der Definition einer Tangente zusammen?
Argumentiere, ob es sich bei der roten Geraden in der obigen Grafik um eine Tangente handelt.

Aa π

Mögliche Antwort: Betrachtet man nur die zu Beginn des Kapitels formulierte Definition der Tangente ("Eine Tangente ist eine Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt"), so wäre die rote Gerade keine Tangente, da diese die Kurve nicht nur in einem Punkt berührt, sondern diese auch noch in einem weiteren Punkt schneidet.

Wie wir aber bereits gelernt haben, geht es in der Differentialrechnung darum, Funktionen an einer Stelle zu untersuchen. Betrachtet man nun die rote Gerade in einer sehr kleinen Umgebung um den Berührpunkt, stimmt die Gerade sehr wohl mit der Definition einer Tangente überein.



NEUER VERSUCH

In der Differentialrechnung ist es deswegen sinnvoll, sich eine Tangente als **Schmieggerade** vorzustellen. Die Tangente ist hierbei also eine Gerade, die sich *lokal* dem Verlauf des Funktionsgraphen anschmiegt.

Vorherig
Grundvorstellung "Lokale Änderungsrate"

Weiter
Tangentensteigung und Ableitung

Tangentensteigung und Ableitung

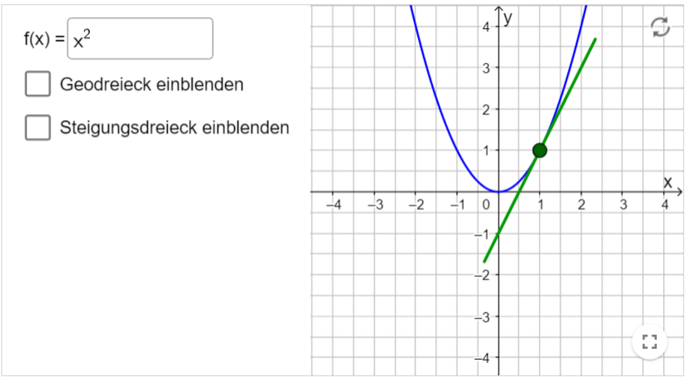
Autor: Sabrina Stimpfl, Ingo Kneißl, eckerts

Mithilfe der Tangenten (=Schmieggeraden) können wir also die Steigung einer Funktion an einer Stelle bestimmen. Hierfür zeichnen wir einfach ein Steigungsdreieck der Tangente ein und können so die Steigung ablesen.

In Aufgabe 1 wird dieser Prozess visualisiert.

Aufgabe 1:

Bewege den grünen Punkt entlang des Funktionsgraphen und beobachte, wie sich die Tangente in diesem Punkt ändert. Die Steigung der Tangente entspricht an jeder Stelle der Steigung der Funktion, welche man mithilfe des Steigungsdreiecks ablesen kann.



Die 1. Ableitung einer Funktion

Kannst du dich noch an folgenden Zusammenhang erinnern?

Differentialquotient = Steigung = Ableitung

Die Ableitung ist also nur ein anderer Begriff für die Steigung des Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle. Wie wir diese Steigung bestimmen, wissen wir ja bereits (=Steigung der Tangente).

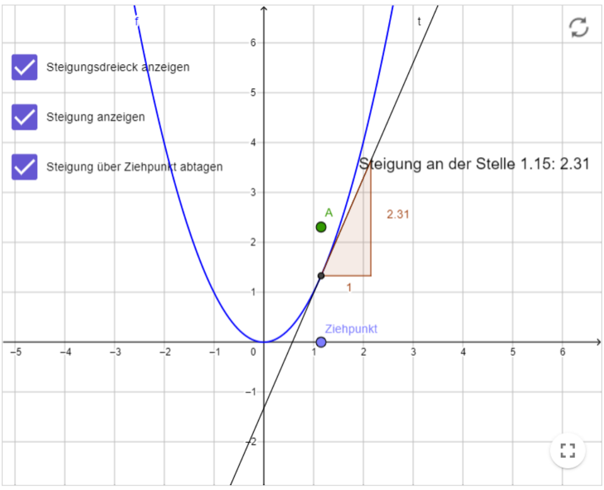
Zeichnet man nun eine neue Funktion, deren Funktionswert an jeder Stelle der Steigung der ursprünglichen Funktion entspricht, erhalten wir die **Ableitungsfunktion**.
Wie genau das funktioniert, kannst du in Aufgabe 2 ausprobieren.

Hinweis: Die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x)$ *wird mit* $f'(x)$ *bezeichnet.*

Aufgabe 2

Bewege den Ziehpunkt und beobachte, wie sich die Steigung der Tangente ändert. Die Steigung der Tangente entspricht der Steigung an der jeweiligen Stelle des Funktionsgraphen.

Aktiviere nun das Kontrollkästchen "Steigung über Ziehpunkt abtragen". Jetzt wird ein neuer Punkt mit den Koordinaten $(Stelle \mid Steigung)$ *in das Koordinatensystem eingezeichnet. Bewege nun den Ziehpunkt weiter und entdecke, wie die Ableitungsfunktion entsteht.*



Versuche nun, die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion abzulesen!

Aa π

Mögliche Antwort: $f'(x) = 2x$

NEUER VERSUCH

Aufgabe 3:

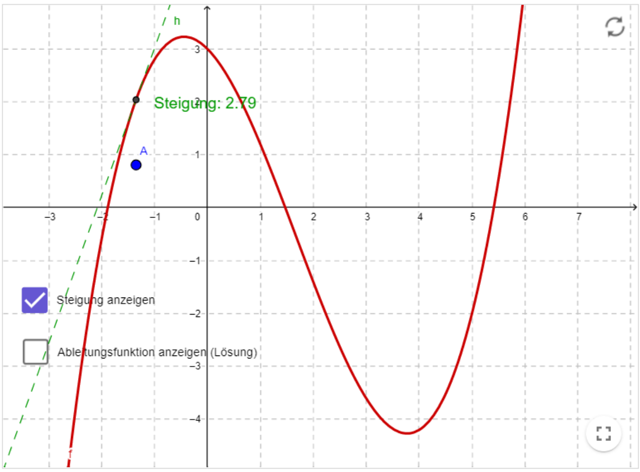
Nun sollst du selbst den Graphen einer Ableitungsfunktion zeichnen.

Bewege hierfür den Punkt A. Dabei wandert auf dem Funktionsgraphen ein Punkt mit, an dem die jeweilige Tangente "klebt". Zusätzlich wird die Steigung der Tangente angegeben.

Deine Aufgabe ist es nun, den Punkt A so zu bewegen, dass dieser die Ableitungsfunktion zeichnet. Dazu muss er sich immer in der Höhe befinden, die zur Steigung der Tangente passt:
Hat die Tangente z.B. an einer Stelle die Steigung 2, dann musst du den Punkt A an dieser Stelle auf den y-Wert 2 hochziehen.

Wenn du das ein wenig geübt hast, kannst du mittels Rechtsklicks auf den Punkt A die Funktion "Spur ein" aktivieren, dann wird der Weg des Punktes gezeichnet und du kannst versuchen, die Ableitungsfunktion einzuzeichnen.

Zur Kontrolle kannst du das Kästchen "Ableitungsfunktion anzeigen" aktivieren.



Zusammenfassung

Die **Steigung einer Funktion an einer Stelle** entspricht immer der **Steigung der Tangente an dieser Stelle**. Zeichnet man eine neue Funktion, die an jeder Stelle den Wert der Steigung der ursprünglichen Funktion als Funktionswert besitzt, erhält man die **Ableitungsfunktion**.

← Vorherig
Tangenten in der Differentialrechnung

Weiter →
Übungsaufgaben

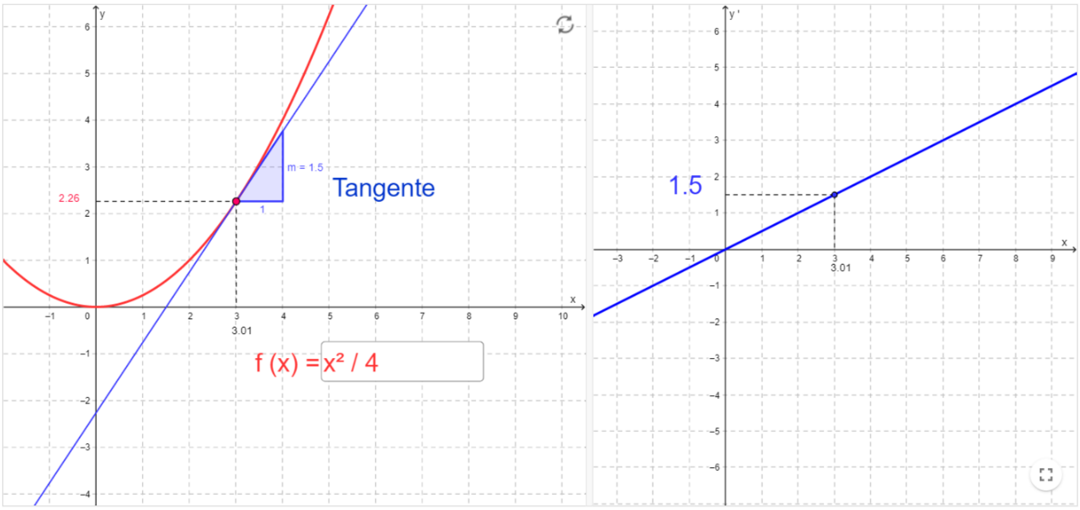
Übungsaufgaben

Autor: Sabrina Stimpfl, Johann Wieser, Manuel Graf

Aufgabe 1:

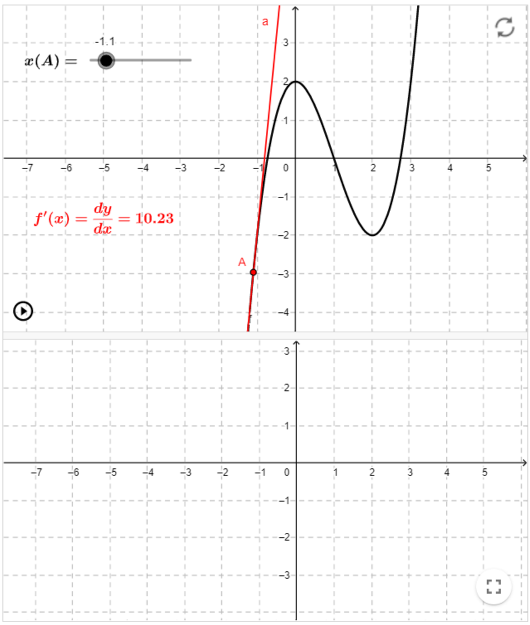
Gib im linken Fenster eine beliebige Funktion ein. Im rechten Fenster wird die jeweilige Ableitungsfunktion gezeichnet. Hier kannst du gut erkennen, dass der Funktionswert der Ableitungsfunktion an jeder Stelle mit der Steigung der Tangente der ursprünglichen Funktion übereinstimmt.

Gib selbstständig ein paar Funktionen ein und erkunde, wie die Funktion und ihre Ableitungsfunktion zusammenhängen!



Aufgabe 2:

Bewege den Schieberegler und entdecke, wie die Ableitungsfunktion der gegebenen Polynomfunktion 3. Grades entsteht. Beantworte anschließend die nachfolgenden Fragen.



Frage 1:

Von welchem Grad ist die Ableitungsfunktion der Polynomfunktion 3. Grades?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ 2. Grad

B ☐ 3. Grad

C ☐ 4. Grad

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Frage 2:

Wie hängen die Polynomfunktion 3. Grades und ihre Ableitungsfunktion zusammen?

Aa π

Mögliche Antwort: Die Funktionswerte der Ableitungsfunktion entsprechen an jeder Stelle der Steigung der Funktion.

NEUER VERSUCH

Frage 3:

Welche Aussagen treffen zu?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Hat die Tangente der Funktion an einer Stelle eine positive Steigung, so hat auch die Tangente der Ableitungsfunktion an dieser Stelle eine positive Steigung.

B ☐ Hat die Tangente einer Funktion an einer Stelle eine positive Steigung, so ist der Funktionswert der Ableitungsfunktion an dieser Stelle positiv.

C ☐ Ist die Funktion in einem Intervall streng monoton fallend, so hat die Ableitungsfunktion in diesem Intervall negative Funktionswerte.

D ☐ Die Funktion und ihre Ableitungsfunktion haben dieselben Nullstellen.

E ☐ Würde man den Funktionsgraphen entlang der y-Achse verschieben, wäre die Ableitungsfunktion trotzdem dieselbe, da die Steigungen gleich bleiben.

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Frage 4:

An welchen Stellen hat die Ableitungsfunktion Nullstellen? Welche Besonderheit weist der Graph der Funktion jeweils an diesen Stellen auf?

Aa π

Mögliche Antwort: Die Ableitungsfunktion hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ Nullstellen. Die ursprüngliche Funktion hat an diesen Stellen Extremstellen.

NEUER VERSUCH

← Vorherig
Tangentensteigung und Ableitung

Weiter
Grundvorstellung "Tangentensteigung" →

Grundvorstellung "Tangentensteigung"

Autor: Sabrina Stimpfl

Grundvorstellungen zu "Tangentensteigung"

1) Vorstellung von Tangenten als Schmiegeraden.
2) Die Tangente an eine Kurve an einer Stelle hat die gleiche Steigung wie die Kurve an dieser Stelle.
3) Die Tangente gibt die lokale Richtung einer Kurve an.

← Vorherig
Übungsaufgaben

Weiter
Funktionenlupe →

Funktionenlupe

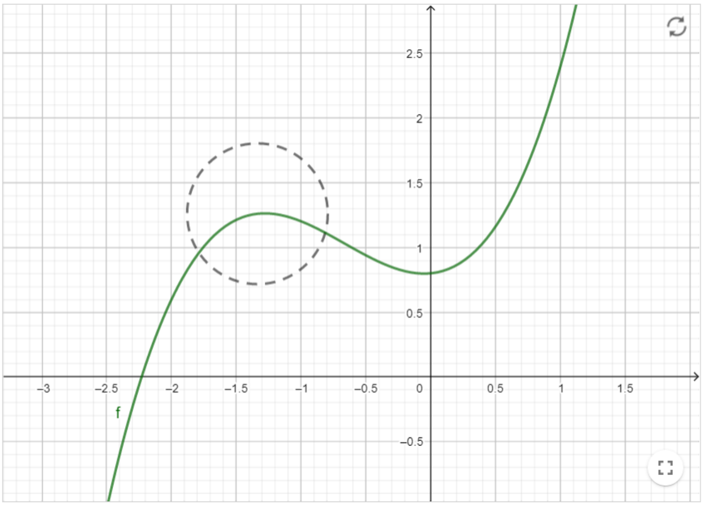
Autor: Sabrina Stimpfl

Im letzten Kapitel haben wir bereits gelernt, dass die Steigung einer Funktion an einer Stelle immer der Steigung der Tangente an dieser Stelle entspricht. Nun wollen wir uns überlegen, warum das auch wirklich Sinn ergibt.

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades. Stell dir vor, du zoomst "unendlich nahe" an die Stelle des Graphen heran, der durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht.

Hinweis: durch Scrollen des Mausrades kannst du in der Grafik unten an die gewünschte Stelle heran-zoomen.



Wie würde der Graph aussehen, wenn du ganz nahe an die Funktion heran-zoomst?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐

B ☐

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Warum das so ist, überlegen wir uns im nächsten Unterkapitel "Lokale Linearität".

← Vorherig
Grundvorstellung "Tangentensteigung"

Weiter
Lokale Linearität →

Lokale Linearität

Autor: Sabrina Stimpfl, H.-J. Elschenbroich. GeoGebra Institut NRW, Friedrich Verlag

Hier nun die Erklärung, wieso der Funktionsgraph wie eine Gerade aussieht, wenn man sehr nahe an diesen heran-zoomt.

Aufgabe 1:

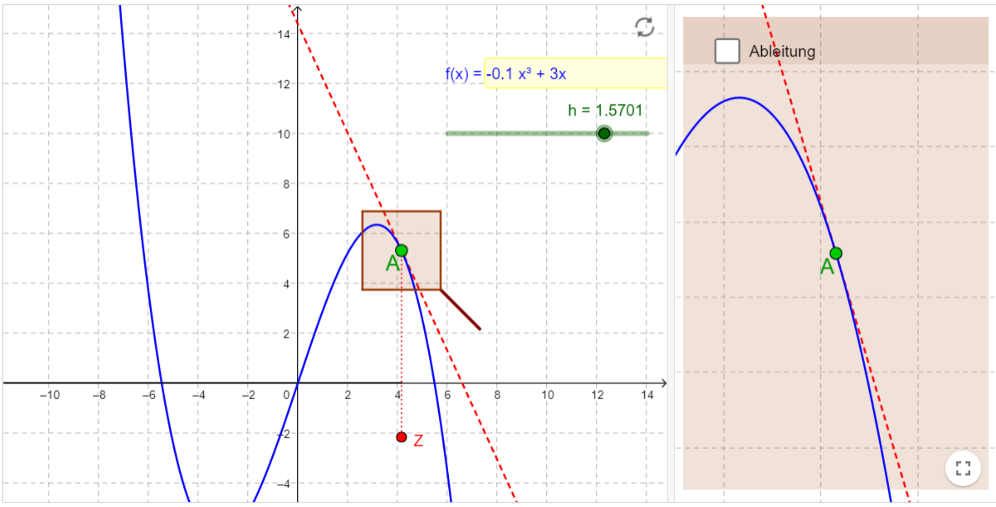
Gegeben ist eine Polynomfunktion 3. Grades. Auf dieser ist der Punkt A eingezeichnet, sowie die Tangente an den Funktionsgraphen in diesem Punkt. Über dem Punkt A siehst du in braun eine Lupe. Dieser Lupenausschnitt ist rechts im Fenster noch einmal groß dargestellt.

Bewege nun den Schieberegler h und zoome dadurch immer weiter an den Punkt A heran. Beobachte diesen Vorgang im rechten Fenster. Was passiert? Formuliere in eigenen Worten und vergleiche anschließend mit der Musterantwort.

Aa π

Mögliche Antwort: Zoomt man an die Funktion heran, sieht diese immer mehr aus wie eine Gerade und nähert sich immer weiter der Tangente in diesem Punkt an.

NEUER VERSUCH



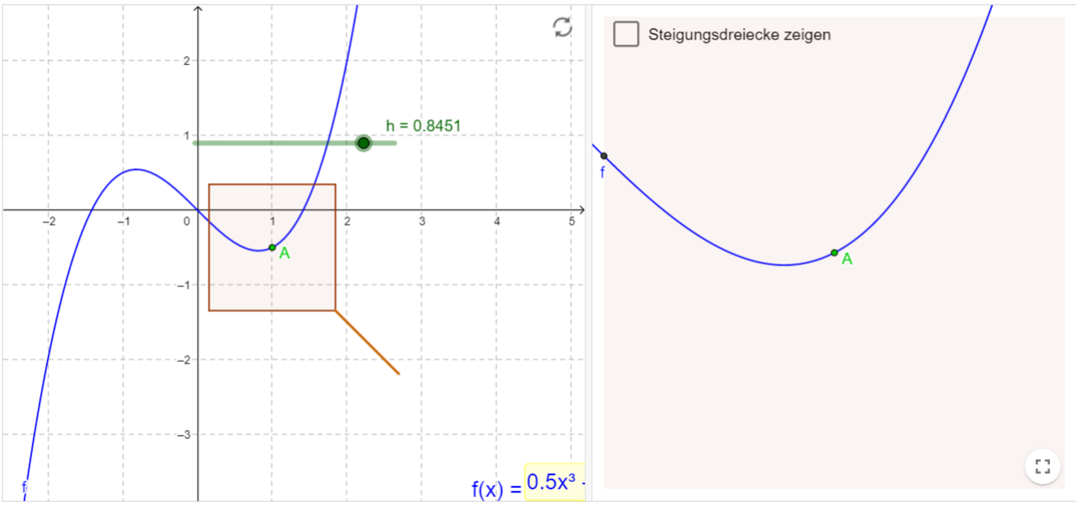
Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man immer ein geradliniges Kurvenstück. Wenn man also sehr nahe an die Funktion heran-zoomt, ist diese beinahe ident mit der Tangente an dieser Stelle - sie kann also lokal durch einen linearen Zusammenhang beschrieben werden.

Das ist der Grund, wieso wir die Steigung einer Kurve an einer Stelle mittels der Steigung der Tangente an dieser Stelle bestimmen können. Das kannst du in Aufgabe 2 entdecken.

Aufgabe 2:

Gegeben ist eine Polynomfunktion 3. Grades und ein Punkt A auf dieser Funktion. Über diesem Punkt A siehst du in braun eine Lupe. Der Lupenausschnitt ist im Fenster rechts vergrößert dargestellt.

Bewege nun den Schieberegler h und zoome dadurch an die Funktion heran. Im rechten Fenster kannst du beobachten, wie das Kurvenstück immer mehr zu einer Geraden wird.
Aktiviere nun das Kontrollkästchen "Steigungsdreiecke zeigen". Umso weiter du heran-zoomst, desto genauer stimmen die Steigungen der Funktion links bzw. rechts vom Punkt A überein. In einem sehr kleinen Bereich um den Punkt A kann die Funktion also durch einen linearen Zusammenhang beschrieben werden.



Zusammenfassung

Zoomt man sehr nahe an eine Funktion heran, sieht man irgendwann nur noch ein geradliniges Kurvenstück. In einer **sehr kleinen Umgebung um einen Punkt** kann eine Funktion also **durch einen linearen Zusammenhang beschrieben** werden. Das ist der Grund, wieso wir die Steigung einer Funktion an einer Stelle durch die Steigung der Tangente an dieser Stelle bestimmen können.

← Vorherig
Funktionenlupe

Weiter →
Grundvorstellung "Lokale Linearität"

Grundvorstellung "Lokale Linearität"

Autor: Sabrina Stimpfl

Grundvorstellungen zur "Lokalen Linearität"

1) Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
2) Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

← Vorherig
Lokale Linearität

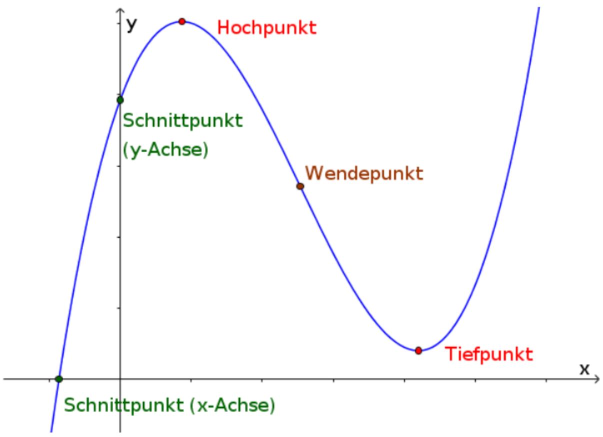
Weiter →
Einführung

Einführung

Autor: Sabrina Stimpfl

Die Kurvendiskussion ist das Mittel, um Eigenschaften von Funktionen mathematisch zu beweisen. Die Basis hierfür ist die Differentialrechnung.

Wir werden uns in diesem Kapitel mit dem Monotonie- und Krümmungsverhalten, sowie mit dem Aufsuchen und Interpretieren von Extrem-, Wende- und Sattelstellen beschäftigen.



Vorherig
Grundvorstellung "Lokale Linearität"

Weiter
Monotonie

Monotonie

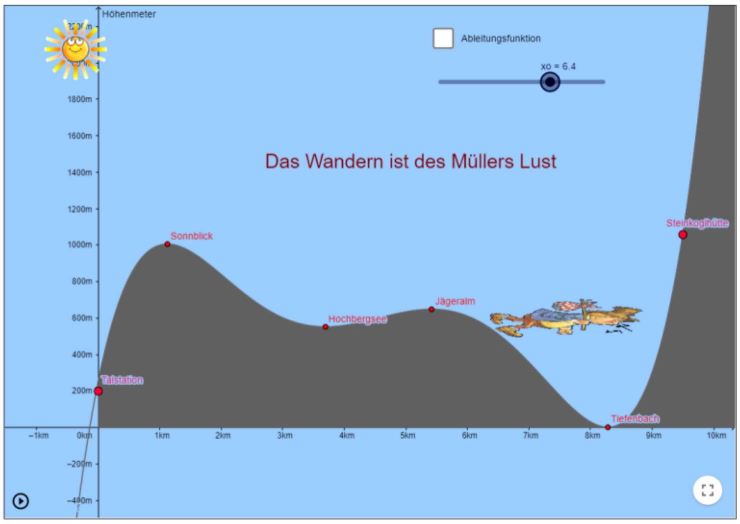
Autor: Sabrina Stimpfl, JackyO, Alexander Fox

Gerade beim Wandern oder Rad fahren interessiert dich sicher, wann ein Weg bergauf oder bergab geht. Mathematisch gesehen fragen wir uns dabei, ob die Funktionswerte steigen oder fallen. Das wollen wir in Aufgabe 1 untersuchen.

Aufgabe 1:

Herr Müller wandert von der Talstation bis zur Steinkoglhütte. Der Verlauf des 9,5 km langen Wanderweges ist in der Grafik als Funktion dargestellt, die der Länge des zurückgelegten Weges (in km) jeweils die aktuelle Seehöhe (in m) zuordnet.

Durch Bewegen des Schiebereglers kannst du Herrn Müller bewegen. Beantworte die Fragen im Anschluss.



Frage 1:

Beschreibe den Funktionsverlauf möglichst genau im Kontext. Beachte hierbei das Höhenprofil der Funktion, sowie den Monotonieverlauf (wann geht es bergauf und bergab).

Aa π

Mögliche Antwort: Zum Beispiel:
Herr Müller startet seine Wanderung bei der Talstation. Diese liegt auf einer Seehöhe von 200 m. Dann geht es sehr steil bergauf und nach ca. 1,1 km erreicht er den Sonnblick, der sich auf ca. 1000 m befindet. Vom Gipfel geht es wieder bergab zum Hochbergsee, welcher auf einer Seehöhe von ca. 550 m liegt. Danach geht Herr Müller zur ca. 2 km entfernten Jägeralm leicht bergauf. Den tiefsten Punkt der Wanderung erreicht er nach ca. 8,3 km nach einem steilen Abstieg zum Tiefenbach. Herr Müller befindet sich nun auf Meeresniveau, d.h. wir haben eine Seehöhe von 0 m. Von dort aus geht es noch einmal steil bergauf zum letzten Ziel der Wanderung, der Steinkoglhütte, welche auf einer Seehöhe von ca. 1100 m liegt.

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Nun wollen wir die Monotonie aber auch berechnen können. Hierbei hilft die Ableitungsfunktion.
Indem du auf das Kontrollkästchen "Ableitungsfunktion" klickst, wird die Ableitung angezeigt.

Untersuche, wie man mithilfe der Ableitungsfunktion erkennen kann, ob der Bergsteiger bergauf oder bergab geht.

Aa π

Mögliche Antwort: Hat die Ableitung Funktionswerte größer als 0 (die Ableitung ist positiv), so ist der Funktionsgraph streng monoton steigend. Wenn die Ableitung Funktionswerte kleiner als 0 hat (die Ableitung ist negativ), so ist der Funktionsgraph streng monoton fallend.

Das ergibt natürlich Sinn, wenn wir uns zurückerinnern, dass **Ableitung = Steigung**.

NEUER VERSUCH

Die obigen Überlegungen ergeben die folgenden Monotoniesätze:

Wenn die **Ableitung** in einem Intervall **positiv** ist, also $f'(x) > 0$, dann ist die Funktion in diesem Intervall **streng monoton steigend**.
Wenn die **Ableitung** in einem Intervall **negativ** ist, also $f'(x) < 0$, dann ist die Funktion in diesem Intervall **streng monoton fallend**.

Monotonie und Tangentensteigung

Das Monotonieverhalten können wir auch mithilfe der Tangentensteigung untersuchen. Die **Tangente** gibt nämlich immer die **lokale Richtung der Funktion** an.

Ist die **Steigung der Tangente** an einer Stelle **positiv**, so gilt dies auch für die Steigung der Funktion - diese ist also **streng monoton steigend**.
Ist die **Steigung der Tangente** an einer Stelle **negativ**, so gilt dies auch für die Steigung der Funktion - diese ist also **streng monoton fallend**.

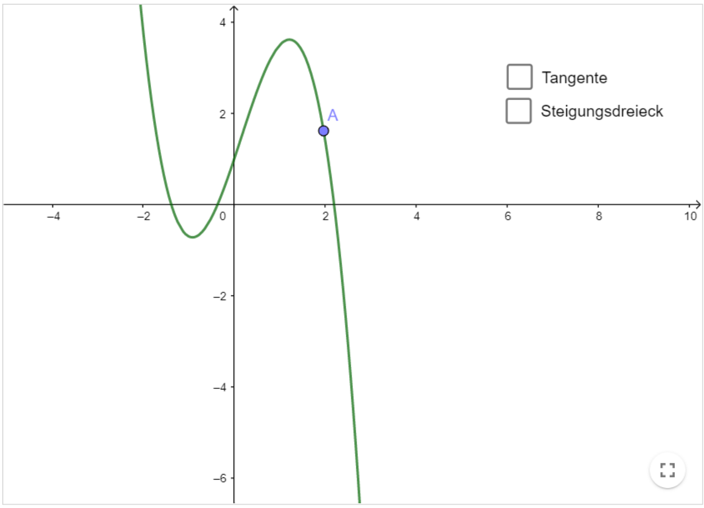
Dies kannst du in Aufgabe 2 überprüfen.

Aufgabe 2:

Gegeben ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion mithilfe der Tangentensteigung. Aktiviere hierfür das Kontrollkästchen "Tangente", um diese anzuzeigen. Zudem kannst du auch das Kontrollkästchen "Steigungsdreieck" aktivieren, um die Steigung der Tangente an jeder Stelle auszugeben.

Beantworte dann die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Wie hängen die Steigung der Tangente und die Steigung der Funktion zusammen?

Aa π

Mögliche Antwort: Hat die Tangente eine positive/negative Steigung, ist die Steigung der Funktion streng monoton steigend/fallend.

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Ist die Funktion an der Stelle 3 streng monoton steigend oder fallend? Wie groß ist die Steigung an dieser Stelle?

Hinweis: Tangentensteigung

Aa π

Mögliche Antwort: Die Funktion ist an der Stelle 3 streng monoton fallend und die Steigung beträgt ca. $m = -7,7$.

NEUER VERSUCH

Frage 3:

Gibt es auch Stellen, an denen die Steigung der Tangente gleich 0 ist? Wenn ja, um welche Stellen handelt es sich hierbei?

Aa π

Mögliche Antwort: Ja, es gibt Stellen an denen die Steigung der Tangente gleich 0 ist. Dies ist genau bei den Extremstellen der Fall.

NEUER VERSUCH

Zusammenfassung

Das **Monotonieverhalten** einer Funktion lässt sich über die **1. Ableitung** bzw. **Steigung der Tangente** beschreiben.

Ist die 1. Ableitung/Steigung der Tangente an einer Stelle **positiv**, so ist die Funktion an dieser Stelle **streng monoton steigend**.
Ist die 1. Ableitung/Steigung der Tangente an einer Stelle **negativ**, so ist die Funktion an dieser Stelle **streng monoton fallen**.
Ist die 1. Ableitung/Steigung der Tangente an einer Stelle **gleich 0,** so hat die Funktion an dieser Stelle eine **Extremstelle**.

← Vorherig
Einführung

Weiter
Extremstellen →

Extremstellen

Autor: Sabrina Stimpfl, eckerts

Im vorherigen Unterkapitel haben wir bereits untersucht, wie das Monotonieverhalten einer Funktion mit der 1. Ableitung bzw. der Steigung der Tangente zusammenhängt.

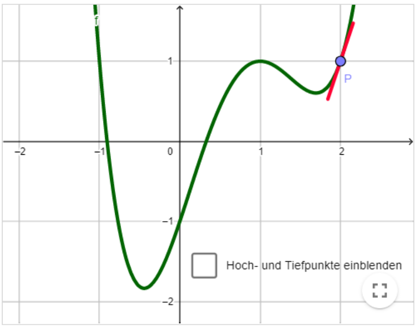
Außerdem haben wir bereits bemerkt, dass es auch Stellen gibt, an denen die Steigung der Tangente 0 ist. Diese Stellen nennen wir Extremstellen und diese wollen wir in diesem Kapitel genauer untersuchen. Um uns das besser vorstellen zu können, denken wir uns diese Extremstellen als Berggipfel bzw. Talkessel.

Auf jedem Berggipfel gibt es einen Punkt, wo es eben ist. In jedem Talkessel auch.
So ist das auch bei Funktionen. Dies kannst du in Aufgabe 1 erkunden.

Aufgabe 1:

Bewege den Punkt P entlang des Funktionsgraphen und beobachte, an welchen Stellen die Tangente waagrecht ist.

Hinweis: Durch Aktivieren des Kontrollkästchens "Hoch- und Tiefpunkte einblenden" werden die Extremstellen der Funktion eingezeichnet.



Wie du in Aufgabe 1 hoffentlich feststellen konntest, ist die Tangente genau bei den **Extremstellen** waagrecht. Wollen wir Extremstellen einer Funktion finden, müssen wir also immer nach Stellen suchen, an denen die Funktion "eben" ist, d.h. eine **waagrechte Tangente** besitzen.

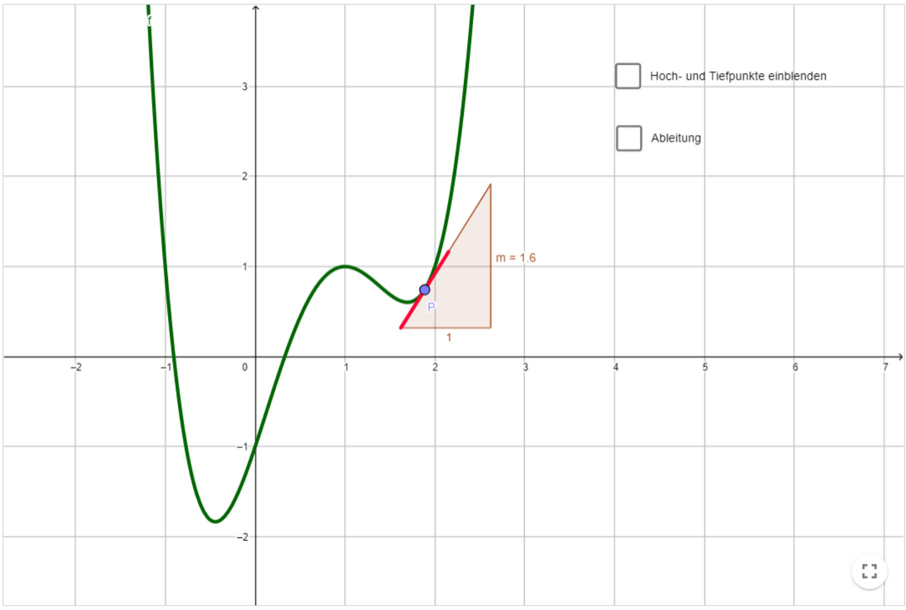
Die Extremstellen können wir auch noch genauer einteilen: "Berggipfel" heißen **Hochpunkte**, die "Talkessel" heißen **Tiefpunkte**.

Was bedeutet dies nun für die Steigung und somit für die 1. Ableitung der Funktion? Dies kannst du in Aufgabe 2 untersuchen.

Aufgabe 2:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades. Zusätzlich ist das Steigungsdreieck der Tangente im Punkt P eingezeichnet.

Bewege nun den Punkt P entlang des Funktionsgraphen und beantworte die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Wie groß ist die Steigung der Tangente, wenn diese waagrecht ist? Also wie groß ist die Steigung der Tangente an den Extremstellen?

Aa π

Mögliche Antwort: 0

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Welche besonderen Stellen hat die Ableitungsfunktion an den Extremstellen?

Hinweis: Du kannst als Hilfestellung die Ableitungsfunktion einblenden, indem du das Kontrollkästchen "Ableitung" aktivierst.

Aa π

Mögliche Antwort: Nullstellen

NEUER VERSUCH

Zusammenfassung Extremstellen

Das Monotonieverhalten ändert sich jeweils an den Extremstellen der Funktion. An den Hoch- und Tiefpunkten besitzt der Graph eine waagrechte Tangente. Somit gilt an dieser Stelle, dass die Steigung gleich 0 ist, also $f'(x) = 0$. Die Ableitungsfunktion hat an dieser Stelle eine Nullstelle.

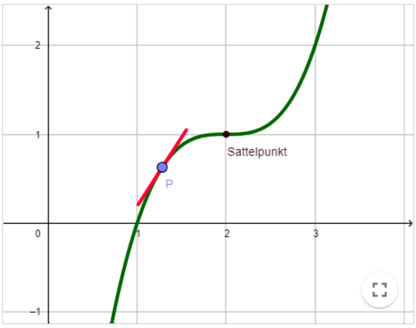
Bei einem **Hochpunkt** wechselt die Funktion von streng monoton steigend zu streng monoton fallend, somit besitzt die **Ableitungsfunktion** an dieser Stelle einen **Vorzeichenwechsel von + nach -**.
Bei einem **Tiefpunkt** wechselt die Funktion von streng monoton fallend zu streng monoton steigend, somit besitzt die **Ableitungsfunktion** an dieser Stelle einen **Vorzeichenwechsel von - nach +**.

ACHTUNG

Leider gibt es aber auch noch andere Punkte, bei denen die Tangente ebenso waagerecht verläuft. Diese nennen sich Sattelpunkte.

In der folgenden Graphik kannst du den Verlauf der Tangente in einem Sattelpunkt untersuchen.

Bewege hierfür den Punkt P entlang des Funktionsgraphen.



Wie können wir diese drei Punkte (Hoch- Tief- und Sattelpunkt) nun unterscheiden?

Wir müssen jeden "Kandidaten" einzeln untersuchen: Dazu stellen wir uns vor, wir laufen auf dem Graphen über den betreffenden Punkt hinweg (immer von links nach rechts) und beobachten, wie sich die Steigung ändert:

- **Hochpunkt**: Beim Spaziergang über den Gipfel geht es **erst bergauf und dann bergab.**
- **Tiefpunkt**: Durch den Talkessel geht es **erst bergab und dann bergauf.**
- **Sattelpunkt**: Hier geht es entweder **vorher *und* nachher bergauf** (wie in der Grafik oben) oder es geht **auf beiden Seiten bergab**.

Vorherig
Monotonie

Weiter
Krümmung

Krümmung

Autor: Sabrina Stimpfl, eckerts, jangriese

In diesem Unterkapitel werden wir die Krümmung von Funktionen mittels der Differentialrechnung untersuchen.

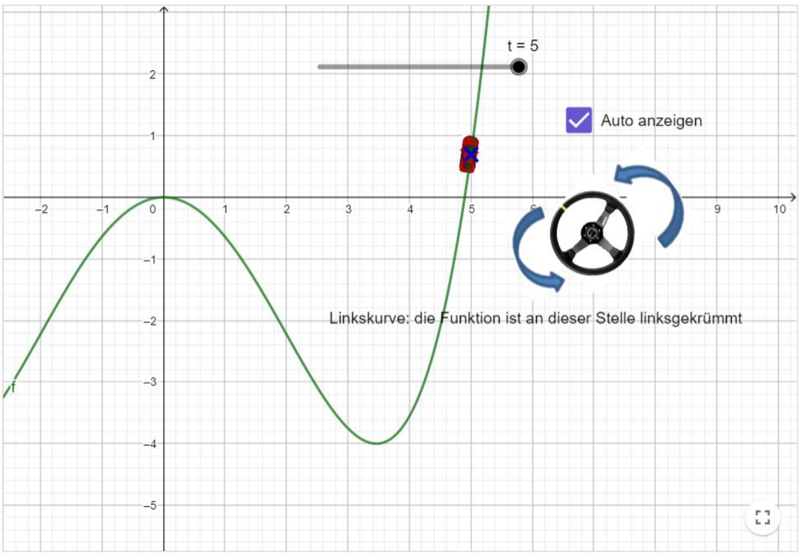
Zuerst stellt sich aber die Frage: Was ist Krümmung überhaupt?
Stellen wir uns hierfür vor, dass wir mit einem Auto entlang eines Funktionsgraphen fahren. Um immer in der Spur zu bleiben, müssen wir das Lenkrad nach links bzw. rechts bewegen. Das bedeutet, dass eine Funktion in einer Linkskurve linksgekrümmt und in einer Rechtskurve rechtsgekrümmt ist.

Dies kannst du in Aufgabe 1 entdecken.

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion.

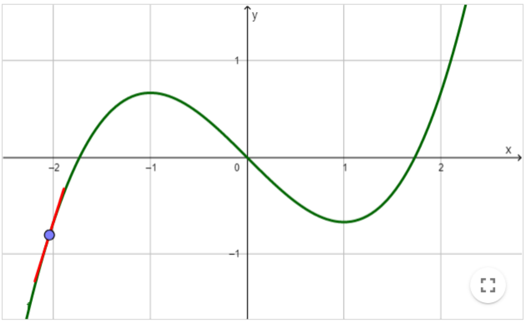
Bewege das Auto entlang des Funktionsgraphen und überlege dir dabei, in welche Richtung du lenken müsstest, um auf der Spur zu bleiben.



Aufgabe 2:

Mittlerweile können wir uns etwas unter Links- bzw. Rechtskrümmung vorstellen.

Bewege nun den Punkt entlang des Funktionsgraphen und beantworte die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Im Bereich $x < 0$ ist eine

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Rechtskurve

B ☐ Linkskurve

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Frage 2:

Im Bereich $x > 0$ ist eine

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ Rechtskurve

B ☐ Linkskurve

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Beobachte nun genau das rote Tangentenstück, um die nächsten Fragen zu beantworten.

Frage 3:

In der Rechtskurve nimmt die Steigung

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ ständig zu

B ☐ ständig ab

C ☐ mal zu und mal ab

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Frage 4:

In der Linkskurve nimmt die Steigung

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ ständig zu

B ☐ ständig ab

C ☐ mal zu mal ab

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Was hat die Krümmung jetzt mit der Differentialrechnung zu tun?
Erinnern wir uns zurück, dass die Ableitung auch als Änderungsrate betrachtet werden kann. In Aufgabe 2 haben wir die Änderung der Steigung betrachtet (ob sie zu- oder abnimmt bzw. anders formuliert, ob die Änderungsrate der Steigung positiv oder negativ ist).
Die Steigung selbst ist aber schon die Ableitung der Funktion. Deswegen ist die **Änderungsrate der Steigung** die **Ableitung der Ableitung**. Die Ableitung der Ableitungsfunktion nennt man **zweite Ableitung**.

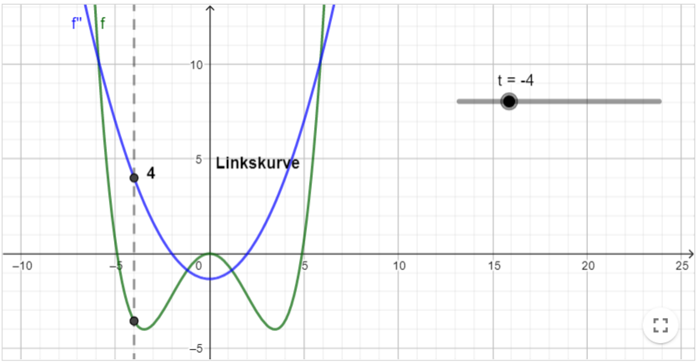
Ist also die **2. Ableitung** an einer Stelle **positiv**, haben wir eine **Linkskurve**.
Ist die **2. Ableitung** an einer Stelle **negativ**, so haben wir eine **Rechtskurve**.

Die zweite Ableitung wird in der Differentialrechnung mit $f''(x)$ bezeichnet, wodurch die obigen Aussagen auch wie folgt geschrieben werden können:
$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt
$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt

Wir merken uns:
Krümmung = 2. Ableitung

Aufgabe 3:

Nun wollen wir den Zusammenhang zwischen der Krümmung und der 2. Ableitung einer Funktion genauer untersuchen.
Bewege den Schieberegler t und beantworte die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Wie hängen die Krümmung und die 2. Ableitung einer Funktion zusammen?

Aa π

Mögliche Antwort: Wenn die Funktion linksgekrümmt/rechtsgekrümmt ist, dann sind die Funktionswerte der 2. Ableitung positiv/negativ.

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Gibt es auch Stellen, an denen die Krümmung der Funktion gleich 0 ist? Wenn ja, was ist das besondere an diesen Stellen?

Aa π

Mögliche Antwort: Ja, es gibt Stellen, an denen die Krümmung der Funktion (also die 2. Ableitung) gleich 0 ist. Die Funktion hat an diesen Stellen Wendestellen.

Hinweis: Mit den Wendestellen werden wir uns im nächsten Kapitel näher beschäftigen.

NEUER VERSUCH

Extremstellen und zweite Ableitung

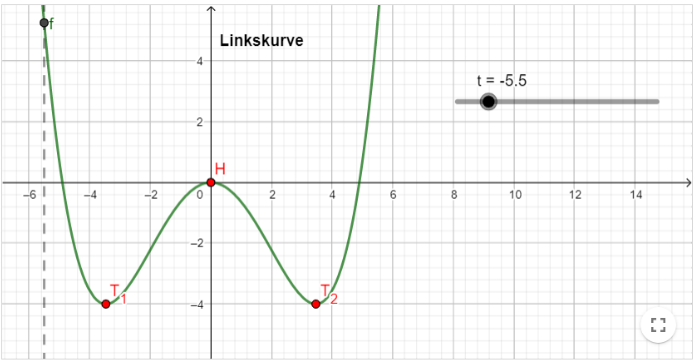
Nun wollen wir noch kurz zu den Extremstellen zurückkehren.
Wir wissen bereits, dass für Extremstellen $f'(x) = 0$ gelten muss. Dies nennt sich **notwendige Bedingung**.

Mit dieser Bedingung alleine können wir aber nicht unterscheiden, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt. Dazu wird die zweite Ableitung einer Funktion benötigt. Warum das so ist, kannst du in Aufgabe 4 entdecken.

Aufgabe 4:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion. Zusätzlich sind die Extremstellen dieser Funktion eingezeichnet.

Untersuche nun die Krümmung der Funktion an den Extremstellen und beantworte die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Wie ist die Funktion an einem Tiefpunkt gekrümmt?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ linksgekrümmt

B ☐ rechtsgekrümmt

C ☐ Die Funktion hat dort keine Krümmung

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Frage 2:

Wie ist die Funktion an einem Hochpunkt gekrümmt?

Wähle alle richtigen Antworten aus

A ☐ linksgekrümmt

B ☐ rechtsgekrümmt

C ☐ Die Funktion hat dort keine Krümmung

ANTWORT ÜBERPRÜFEN (3)

Es gilt:
Um unterscheiden zu können, ob es sich bei einer Extremstelle um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt, müssen wir zudem noch die 2. Ableitung (also die Krümmung) an dieser Stelle betrachten. Dies nennt sich **hinreichende Bedingung**.

Deswegen gilt an den Extremstellen zusätzlich zur notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$:
Tiefpunkt: die Funktion ist **linksgekrümmt** $\Rightarrow f''(x) > 0$
Hochpunkt: die Funktion ist **rechtsgekrümmt** $\Rightarrow f''(x) < 0$

Zusammenfassung

Das **Krümmungsverhalten** einer Funktion lässt sich über die **2. Ableitung** beschreiben.

Ist die 2. Ableitung an einer Stelle **positiv**, so ist die Funktion an dieser Stelle **linksgekrümmt**.
Ist die 2. Ableitung an einer Stelle **negativ**, so ist die Funktion an dieser Stelle **rechtsgekrümmt**.
Ist die 2. Ableitung an einer Stelle **gleich 0**, so hat die Funktion an dieser Stelle eine **Wendestelle**.

Um Extremstellen in Hoch- und Tiefpunkte unterscheiden zu können, benötigen wir die 2. Ableitung:
Hochpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Tiefpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$

← Vorherig Extremstellen

Weiter Wendestellen →

Wendestellen

Autor: Sabrina Stimpfl, jangriese

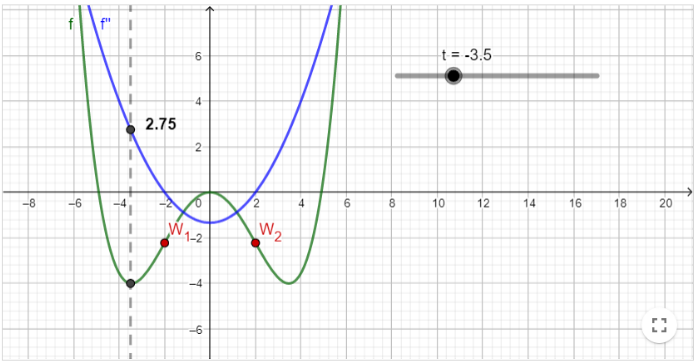
Im vorherigen Unterkapitel haben wir bereits untersucht, wie das Krümmungsverhalten einer Funktion mit der 2. Ableitung zusammenhängt.

Außerdem haben wir bemerkt, dass es auch Stellen gibt, an der die Krümmung gleich 0 ist. Diese Stellen nennen wir Wendestellen und diese wollen wir in diesem Kapitel genauer untersuchen.

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades. Zusätzlich sind der Graph der 2. Ableitung und die Wendepunkte der Funktion eingezeichnet.

Untersuche nun das Krümmungsverhalten an den Wendepunkten und beantworte die anschließenden Fragen.



Frage 1:

Was passiert an den Wendestellen?

Aa π

Mögliche Antwort: An den Wendestellen ändert sich die Krümmung der Funktion. Die Linkskrümmung geht also über in eine Rechtskrümmung oder umgekehrt.

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Wie groß ist die Krümmung an den Wendestellen?

Aa π

Mögliche Antwort: 0

NEUER VERSUCH

Frage 3:

Welche besonderen Stellen hat die 2. Ableitungsfunktion an den Wendestellen?

Aa π

Mögliche Antwort: Nullstellen

NEUER VERSUCH

Zusammenfassung Wendestellen

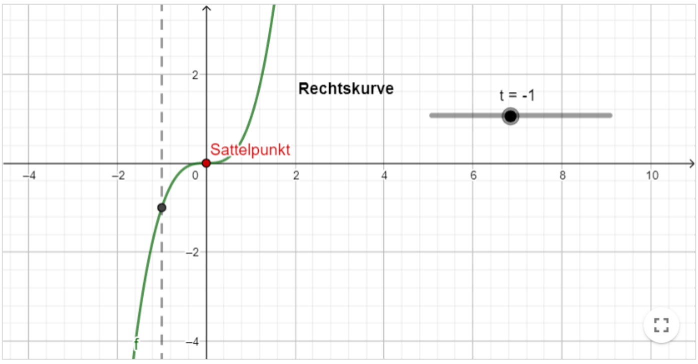
Das Krümmungsverhalten ändert sich jeweils an den Wendestellen der Funktion. Es gilt: $f''(x) = 0$.
Die 2. Ableitungsfunktion hat an dieser Stelle eine Nullstelle.

ACHTUNG

Sattelstellen sind Spezialfälle von Wendestellen. Bei Sattelstellen gilt zusätzlich $f'(x) = 0$, was wir bereits im Unterkapitel "Extremstellen" festgestellt haben. Sattelstellen sind aber keine Extremstellen.

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, ob Sattelstellen Wendestellen sind?
Hierfür denken wir noch einmal an die Definition einer Wendestelle: "An einer Wendestelle ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion." An Sattelstellen gilt $f''(x) = 0$ und an diesen Stellen ändert sich das Krümmungsverhalten sehr wohl, deswegen zählen Sattelstellen auch als Wendestellen. Dies kannst du in Aufgabe 2 entdecken.

Aufgabe 2:



Sowohl bei Wendestellen als auch bei Sattelstellen gilt $f''(x) = 0$. Wie können wir diese beiden Stellen nun unterscheiden?

Dass $f''(x) = 0$ gilt, ist eine **notwendige Bedingung** für eine Wendestelle. Damit man sich aber absolut sicher sein kann, dass es sich hierbei wirklich um eine Wendestelle und nicht um eine Sattelstelle handelt, muss man zusätzlich noch die 3. Ableitung an dieser Stelle betrachten.

Wenn gilt, dass $f'''(x) \neq 0$ ist, handelt es sich um eine Wendestelle. Dies nennt sich **hinreichende Bedingung**.
Falls $f'''(x) = 0$ ist, handelt es sich um eine Sattelstelle.

Vorherig
Krümmung

Weiter
Zusammenfassung

Zusammenfassung

Autor: Sabrina Stimpfl

Monotonie

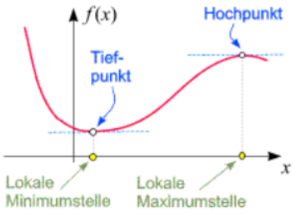
Das Monotonieverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Intervallen die Funktion streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend ist.
Da wir hier die Steigungen untersuchen, benötigen wir die 1. Ableitung der Funktion.

Es gilt:
$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton steigend
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Extremstellen

An den Extremstellen ändert eine Funktion ihr Monotonieverhalten. An diesen Stellen besitzt die Funktion eine waagrechte Tangente und somit ist die Steigung an dieser Stelle gleich 0. Der Graph der 1. Ableitung hat deswegen an dieser Stelle eine Nullstelle.

Wir unterscheiden zwischen Hoch- und Tiefpunkten. Hierfür benötigen wir zusätzlich die 2. Ableitung.
Hochpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Tiefpunkt: $f'(x) = 0 \wedge f'(x) > 0$



Krümmung

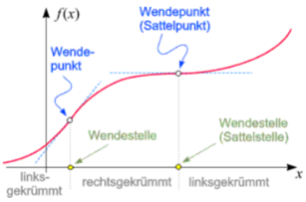
Das Krümmungsverhalten einer Funktion gibt an, in welchen Intervallen die Funktion linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt ist.
Da wir hier die Änderung der Steigung untersuchen, benötigen wir die 2. Ableitung der Funktion.

Es gilt:
$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt
$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ ist rechtsgekrümmt

Wendestellen

An den Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten einer Funktion.

Es gilt:
$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

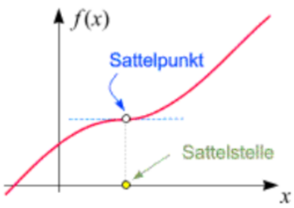


Sattellstellen

An Sattelstellen gilt:
$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) = 0$

Obwohl Sattelstellen eine waagrechte Tangente besitzen und die Steigung an diesen Stellen gleich 0 ist, zählen Sattelstellen nicht als Extremstellen, da sich das Monotonieverhalten trotzdem nicht ändert.

Das Krümmungsverhalten an diesen Stellen ändert sich aber sehr wohl. Deswegen sind Sattelstellen Spezialfälle von Wendestellen.



← Vorherig
Wendestellen

Weiter
Wirtschaft →

Wirtschaft

Autor: Sabrina Stimpfl

Ein Anwendungsgebiet der Differentialrechnung ist die Wirtschaftsmathematik. Diese beschäftigt sich unter anderem mit Kostenverläufen und Fragen der Gewinnmaximierung.

Kostenfunktionen

Bei jeder Güterproduktion fallen kosten an. Die zugehörige Kostenfunktion K gibt an, wie viele Kosten bei einer Produktionsmenge x anfallen. Diese setzen sich aus den **Fixkosten** K_f (unabhängig von der Produktionsmenge) und den **variablen Kosten** $K_v(x)$ (abhängig von der Produktionsmenge) zusammen.

Es gilt:
$K(x) = K_v(x) + K_f$

Typische Kostenverläufe haben in der Wirtschaftsmathematik besondere Namen.
Ist die Kostenfunktion K **streng monoton steigend** und **linksgekrümmt**, so handelt es sich um einen **progessiven** Kostenverlauf.
Ist die Kostenfunktion K **streng monoton steigend** und **rechtsgekrümmt**, so handelt es sich um einen **degressiven** Kostenverlauf.

Was muss also für die Ableitungen K' und K'' der Kostenfunktion bei einem degressiven Kostenverlauf gelten?

Aa π

Mögliche Antwort: $K'(x) > 0$ und $K''(x) < 0$

NEUER VERSUCH

Grenzfunktionen

In der Wirtschaftsmathematik wird die **erste Ableitung** f' einer Funktion f als **Grenzfunktion** von f bezeichnet.

Die 1. Ableitung K' einer Kostenfunktion K heißt also **Grenzkostenfunktion** von K.

Beschreibe in eigenen Worten, was die **Grenzkosten** $K'(x)$ einer Kostenfunktion $K(x)$ im Kontext angeben.

Hinweis: Erinnere dich daran, dass die erste Ableitung die lokale Änderungsrate (die Änderung an einer Stelle) angibt.

Aa π

Mögliche Antwort: Die Grenzkosten $K'(x)$ geben den Kostenzuwachs bei Steigerung der Produktion um eine Einheit an.

NEUER VERSUCH

Gewinnmaximierung

Eine weitere wichtige Frage in der Wirtschaftsmathematik ist, welche Menge x eines Produktes erzeugt und angeboten werden soll, sodass nach dem Verkauf zu einem gewissen Marktpreis ein möglichst großer Gewinn erzielt wird?

Werden also x Mengeneinheiten eines Produktes zu den Produktionskosten $K(x)$ erzeugt und zu einem Preis p verkauft, dann definiert man die Erlös- und Gewinnfunktion wie folgt:

Erlös (=Ertrag, Umsatz) = Verkaufspreis mal verkaufte Menge
$E(x) = p \cdot x$

Gewinn = Erlös minus Kosten
$G(x) = E(x) - K(x)$

Die Stellen, an denen der Gewinn null ist, nennt man **Gewinngrenzen**.

Suchen wir nun jene Produktionsmenge, an der der **Gewinn maximal** ist, müssen wir also die Maximumstelle der Gewinnfunktion bestimmen. Das Bestimmen einer Maximumstelle funktioniert im Kontext der Wirtschaftsmathematik genau gleich, wie du es bereits bei der Kurvendiskussion kennengelernt hast. Wir suchen also jene Stelle, an der Gewinnfunktion eine waagrechte Tangente besitzt.

Wie kann also der maximale Gewinn bestimmt werden?

Aa π

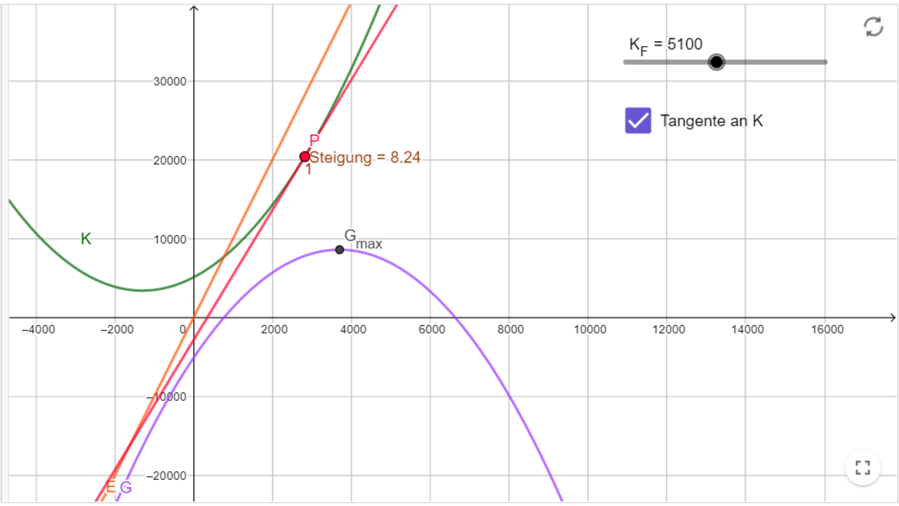
Mögliche Antwort: $G'(x) = 0$

NEUER VERSUCH

Aufgabe 1:

Gegeben ist nun eine Kostenfunktion K, die Erlösfunktion E und die zugehörige Gewinnfunktion G. Der Schieberegler K_F beschreibt die anfallenden Fixkosten.

Beantworte die nachfolgenden Fragen!



Frage 1:

Zu welchem Preis p wurde das Produkt verkauft?

Aa π

Mögliche Antwort: $p = 10$ GE (Geldeinheiten)

NEUER VERSUCH

Frage 2:

Wie wirkt sich eine Änderung der Fixkosten auf den maximalen Gewinn aus?

Aa π

Mögliche Antwort: Sind die Fixkosten geringer, so steigt der maximale Gewinn und umgekehrt.

NEUER VERSUCH

Frage 3:

Wie wirkt sich eine Änderung der Fixkosten auf die Gewinngrenzen aus?

Aa π

Mögliche Antwort: Umso höher die Fixkosten sind, desto näher beisammen sind die Gewinngrenzen.

NEUER VERSUCH

Frage 4:

Der maximale Gewinn kann mittels $G'(x) = 0$ ermittelt werden. Wie groß ist also die Änderung des Gewinns an dieser Stelle?

Aa π

Mögliche Antwort: 0

NEUER VERSUCH

Frage 5:

Aktiviere nun das Kontrollkästchen "Tangente an K".

Wie groß sind die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 2000 Stück? Deute diese im Kontext!

Mögliche Antwort: Die Grenzkosten bei 2000 Stück betragen ca. $6,6$ GE/ME. Das bedeutet, dass sich die Produktionskosten um $6,6$ GE erhöhen, wenn die Produktion von 2000 auf 2001 Stück erhöht wird.

NEUER VERSUCH

Vorherig
Zusammenfassung

Weiter
Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben

Autor: Sabrina Stimpfl, ha-fri

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Differentialrechnung sind Extremwertaufgaben. Dabei geht es darum, eine bestimmte Größe unter vorgegebenen Bedingungen möglichst groß oder möglichst klein zu machen.

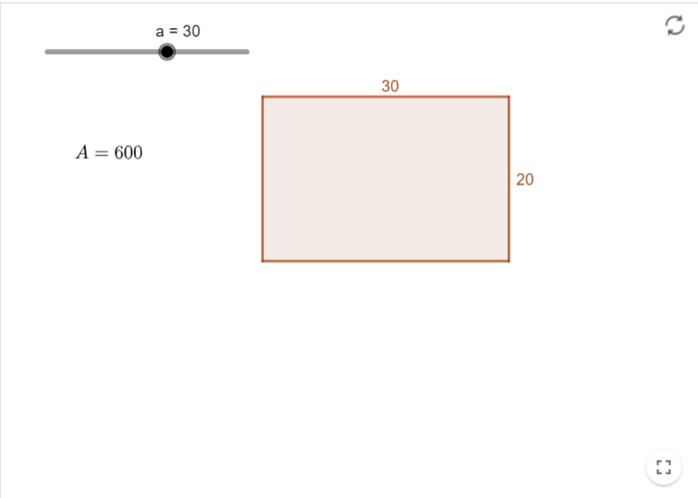
Wir schauen uns die Vorgehensweise Schritt für Schritt in Aufgabe 1 an.

Aufgabe 1:

Welches Rechteck vom Umfang 100 hat den größten Flächeninhalt?

Um eine solche Aufgabe richtig zu verstehen, musst du dir zuerst bewusst machen, was variiert werden kann und was maximal werden soll. In diesem Beispiel können die Seitenlängen des Rechtecks variiert werden, wobei der Umfang aber trotzdem immer 100 betragen muss, d.h. wird eine Seite länger, muss die andere kürzer werden.

Die möglichen Fälle sind in der Grafik unten veranschaulicht.
Bewege hierfür den Schieberegler a, um die Seitenlängen des Rechtecks zu variieren. Beobachte auch, wie sich der Flächeninhalt A des Rechtecks verändert.



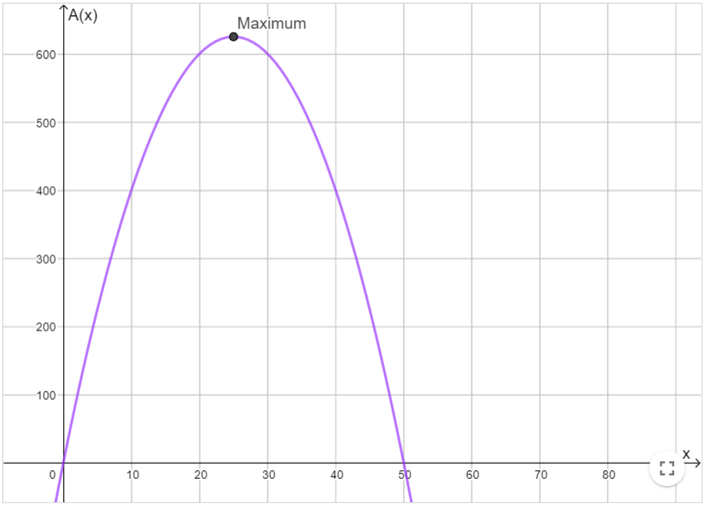
Unter all diesen Rechteck mit Umfang 100 ist nun jenes gesucht, dessen Flächeninhalt maximal wird.

Schritt 1: "Zielgröße" festlegen
Zuerst müssen wir uns überlegen, welche Größe maximal bzw. minimal werden soll. In diesem Beispiel soll der Flächeninhalt A des Rechtecks maximal werden.

Schritt 2: "Zielfunktion" (=Zielgröße als Funktion mehrerer Variablen) anschreiben
Um die gesuchten Seitenlängen zu berechnen, für die der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird, gehen wir von der Formel für den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen x und y aus:
$A(x,y) = x \cdot y$
Die Funktion A ist aber eine Funktion in zwei Variablen und wir kennen leider keine Methode, um diese Funktion zu maximieren. Um dieses Problem zu umgehen, benötigen wir eine weitere Bedingung, die zutrifft.

Schritt 3: Nebenbedingung formulieren und alle Variablen durch eine ausdrücken
Zusätzlich wissen wir ja aus der Angabe, dass der Umfang des Rechtecks 100 betragen soll. Das ist die sogenannte Nebenbedingung:
$2x + 2y = 100$
Wir können nun die Nebenbedingung auf eine der beiden Variablen umformen:
$y = 50 - x$

Schritt 4: Umgeformte Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen
Setzen wir nun die umgeformte Nebenbedingung in unsere Zielfunktion ein, erhalten wir die neue Zielfunktion, die nur noch von einer Variable abhängig ist:
$A(x) = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$
Die Zielfunktion ist in der untenstehenden Grafik veranschaulicht.



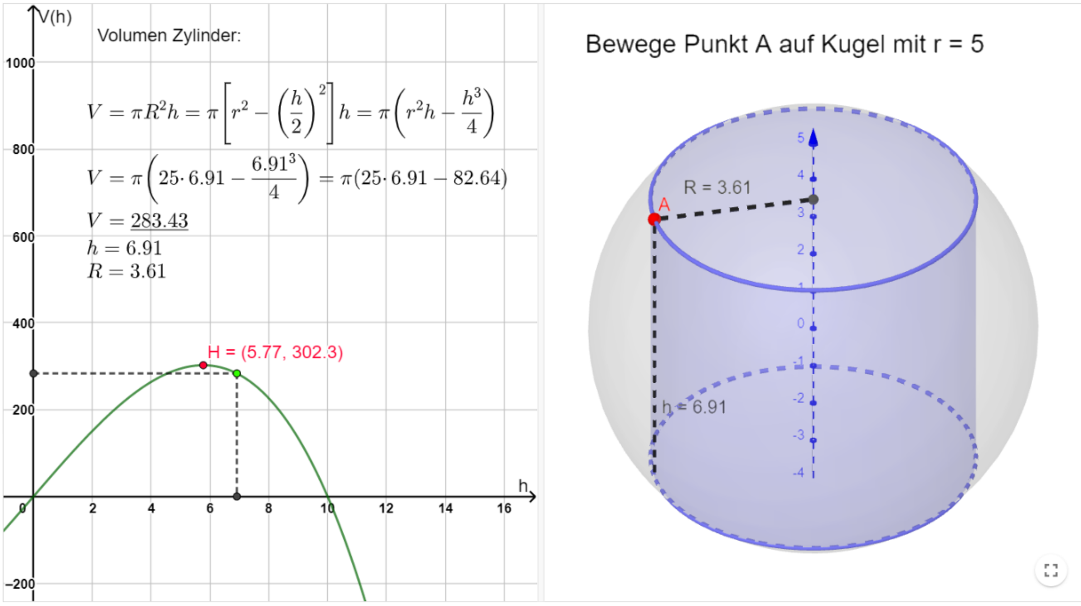
Schritt 5: Extremstellen bestimmen
Nun wollen wir die Maximum- bzw. Minimumstellen der Funktion bestimmen. Wie wir die Extremstellen einer Funktion bestimmen können, wissen wir ja bereits: An den Extremstellen besitzt die Funktion eine waagrechte Tangente, die Funktion hat an dieser Stelle also Steigung 0. Deswegen müssen wir die 1. Ableitung der Funktion 0 setzen:
$A'(x) = 50 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x = 25$

Schritt 6: Lösung in die Nebenbedingung einsetzen
Ist $x = 25$ die Länge einer Seite, so erhält man die Länge der anderen Seite, indem man diese Lösung in die Nebenbedingung einsetzt:
$y = 50 - x = 25$

Somit gilt: Unter allen Rechtecken mit Umfang 100 hat das Quadrat mit der Seitenlänge 25 den größten Flächeninhalt.

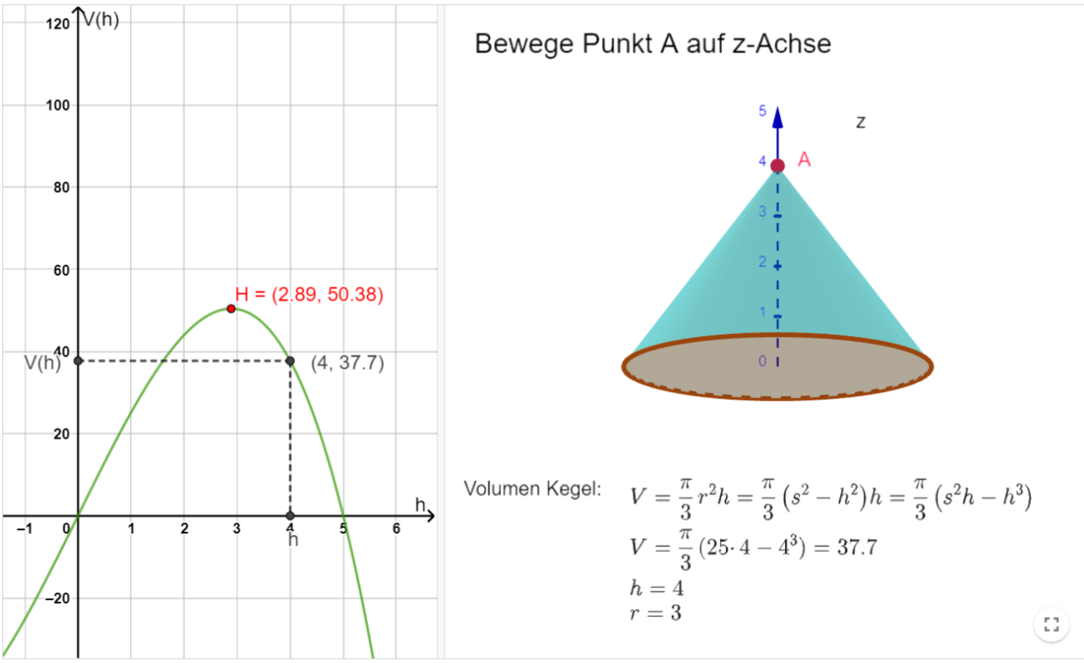
Aufgabe 2:

Eine Holzkugel mit dem Radius r soll so bearbeitet werden, dass ein Zylinder mit möglichst großem Rauminhalt entsteht.



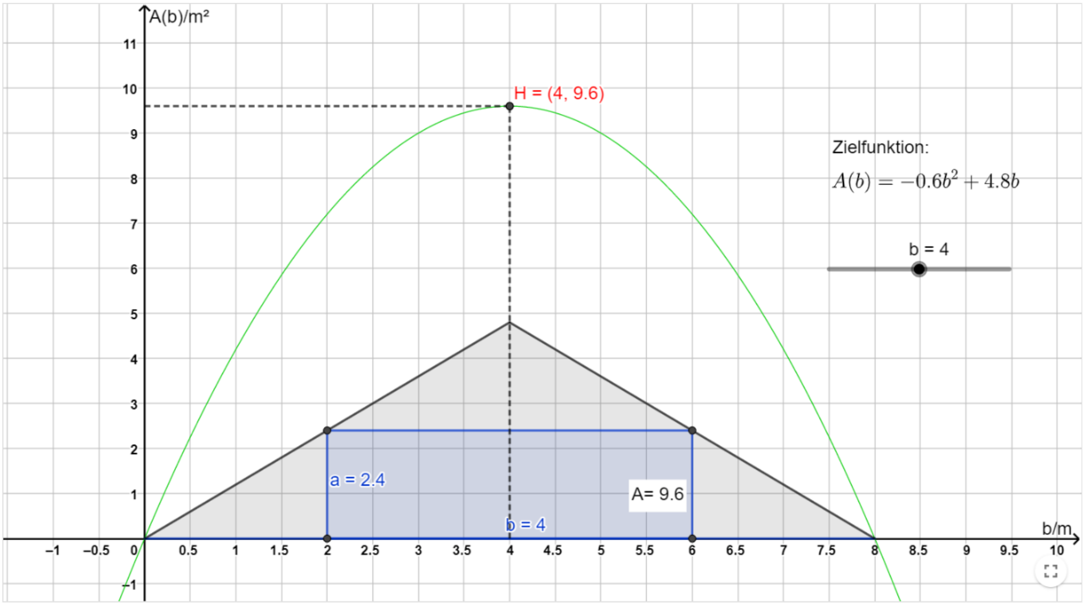
Aufgabe 3:

Aus einem kreisförmigen Filterpapier von 10 cm Durchmesser wird ein Kegel gebastelt, indem ein Sektor herausgeschnitten oder durch Falten eingeknickt wird.
Alle diese Kegel haben Mantellinien der
Länge 5 cm, aber verschiedene Volumina.
Für welche Abmessungen erhält man den Kegel mit dem größten Volumen?



Aufgabe 4:

Ein Dachboden hat als Querschnittsfläche ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Höhe von 4,8 m und einer Basis von 8 m. In ihm soll ein möglichst großes quaderförmiges Zimmer eingerichtet werden.
Reduzieren Sie das räumliche Problem auf ein zweidimensionales Problem und bestimmen Sie die optimalen Abmessungen des Zimmers.



Vorherig
Wirtschaft

Anhang 2: Pre-Diagnosetest

Liebe Schülerin / lieber Schüler,

mein Name ist Sabrina Stimpfl, ich studiere Lehramt mit den Unterrichtsfächern Mathematik und Darstellender Geometrie und verfasse derzeit meine Masterarbeit. Diese befasst sich mit dem Einsatz von GeoGebra im Inhaltsbereich Differentialrechnung in der AHS.

Damit ich besser einschätzen kann, auf welchem mathematischen Stand du dich gerade befindest, bitte ich dich, diesen Einstiegstest auszufüllen. Der Test umfasst 10 Aufgaben im Maturaformat und die Bearbeitungsdauer beträgt ca. 30 Minuten. Für den Erfolg dieser Studie ist es wichtig, dass du alle Fragen bestmöglich beantwortest. Alle Daten werden natürlich anonym erhoben, sie können deiner Person nicht zugeordnet werden, werden streng vertraulich behandelt und haben keinen Einfluss auf deine Mathematiknote.

Zuerst würde ich dich bitten, folgende Fragen zu beantworten.

Schule: ______________________________ Klasse: __________

Geschlecht: ______________________________ Alter: __________

Um die Ergebnisse am Ende der Studie vergleichen zu können, würde ich dich bitten, einen persönlichen Code zu generieren.

- Anfangsbuchstabe des Vornamens deiner Mutter
- Zweiter Buchstabe deines Geburtsmonats
- Anfangsbuchstabe deines Geburtsortes
- die letzten beiden Buchstaben des Vornamens deines Vaters

Zum Beispiel:

- **E**velyn
- N**o**vember → ergibt den Code: **EoWld**
- **W**olfsberg
- Gera**ld**

DEIN CODE: __ __ __ __ __

Vielen Dank für deine Teilnahme!

Reelle Funktion*

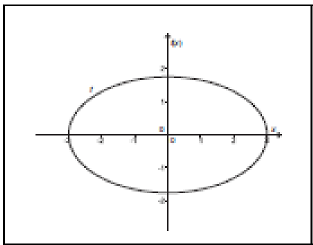
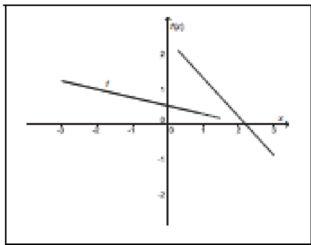
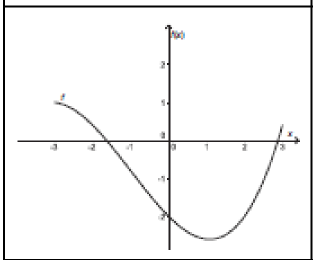
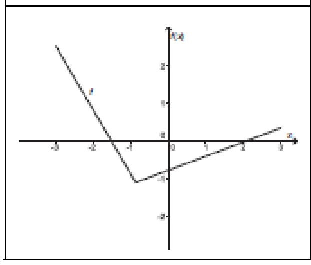
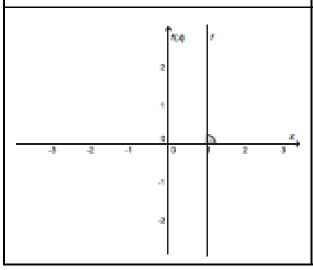
Aufgabennummer: 1_120	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine reelle Funktion f: $[-3; 3] \to \mathbb{R}$ kann in einem Koordinatensystem als Graph dargestellt werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Diagramme an, die einen möglichen Graphen der Funktion f zeigen!

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Charakteristische Eigenschaften einer linearen Funktion

Aufgabennummer: 1_018	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit $f(x) = 3x + 2$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Eigenschaften an, die auf die Funktion f zutreffen!

$f(x + 1) = f(x) + 3$	☐
$f(x + 1) = f(x) + 2$	☐
$f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$	☐
$f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = 3 \cdot (x_2 - x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$	☐

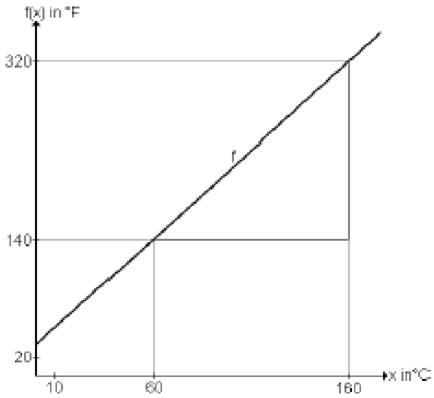
Temperaturskala

Aufgabennummer: 1_063	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich ☐ gewohnte Hilfsmittel möglich ☐ besondere Technologie erforderlich

Temperaturen werden bei uns in °C (Celsius) gemessen; in einigen anderen Ländern ist die Messung in °F (Fahrenheit) üblich.

Die Gerade *f* stellt den Zusammenhang zwischen °C und °F dar.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen können Sie der Abbildung entnehmen? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

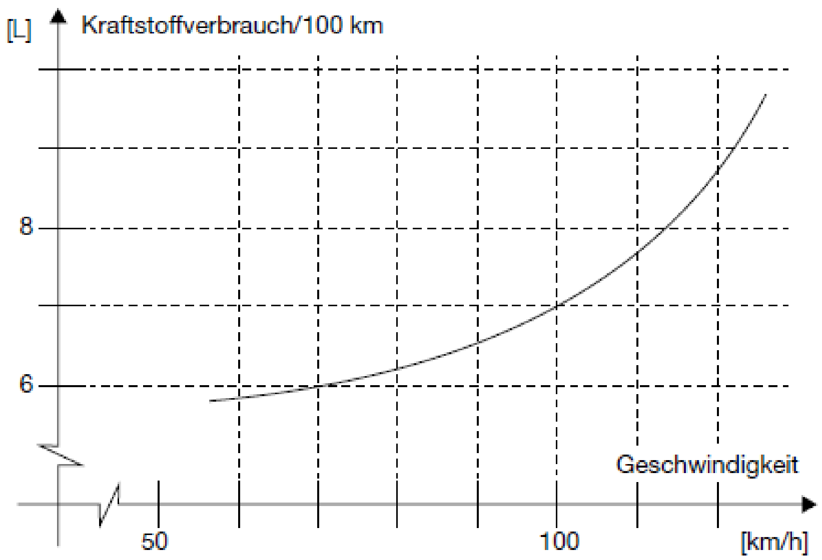
160 °C entsprechen doppelt so vielen °F.	☐
140 °F entsprechen 160 °C.	☐
Eine Zunahme um 1 °C bedeutet eine Zunahme um 1,8 °F.	☐
Eine Abnahme um 1 °F bedeutet eine Abnahme um 18 °C.	☐
Der Anstieg der Geraden ist $k = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{100}{180}$.	☐

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: 1_099	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Kraftstoffverbrauch pro 100 km für eine bestimmte Automarke.



Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenige Geschwindigkeit *v* an, bei der der Kraftstoffverbrauch 7 L pro 100 km beträgt!

v = ___________ km/h

Geben Sie an, wie hoch der Kraftstoffverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 80 km/h ist!

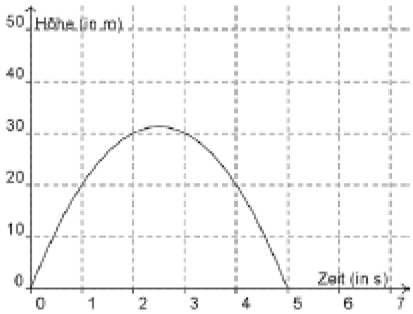
Kraftstoffverbrauch = ___________ L pro 100 km

Funktionale Abhängigkeit

Aufgabennummer: 1_022	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (x aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte Polynomfunktion 2. Grades beschreibt die Höhe (in m) eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit (in s).



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende(n) Aussage(n) an!

Der Körper befindet sich nach einer Sekunde und nach vier Sekunden in 20 m Höhe.	☐
Nach fünf Sekunden ist der Körper in derselben Höhe wie zu Beginn der Bewegung.	☐
Der Körper erreicht maximal 30 m Höhe.	☐
Der Körper befindet sich nach 4,8 Sekunden in einer Höhe von 10 m.	☐
Der Körper befindet sich nach ca. 2,5 Sekunden in der maximalen Höhe.	☐

Funktionseigenschaften erkennen

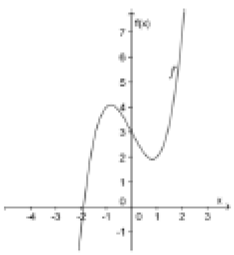
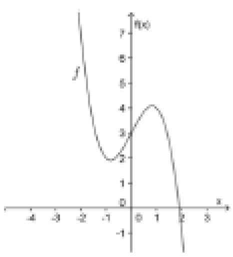
Aufgabennummer: 1_048	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x + 3$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in nachstehender Tabelle die beiden für die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

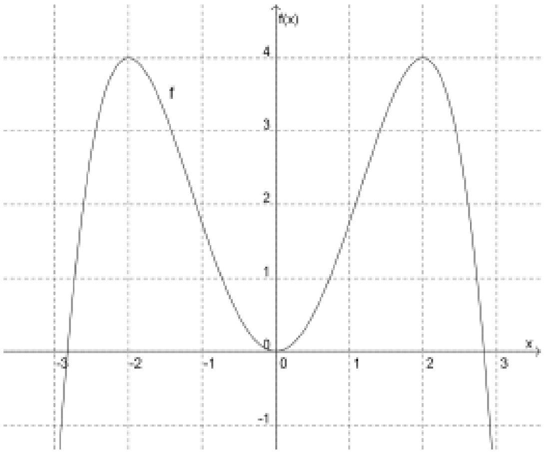
Die Funktion f ist an jeder Stelle monoton fallend.	☐
Die Funktion f besitzt kein lokales Maximum.	☐
Der Graph der Funktion f geht durch $P = (0\|3)$.	☐
Eine Skizze des Graphen der Funktion f könnte wie folgt aussehen: 	☐
Eine Skizze des Graphen der Funktion f könnte wie folgt aussehen: 	☐

Polynomfunktion 4. Grades

Aufgabennummer: 1_012	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f, die vom Grad 4 ist.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

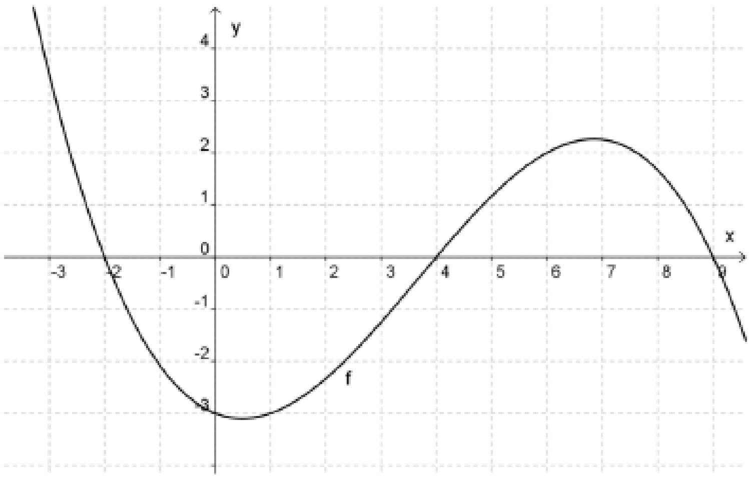
Die Funktion besitzt drei Wendepunkte.	☐
Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.	☐
Die Funktion ist streng monoton steigend für $x \in [0; 4]$.	☐
Die Funktion besitzt einen Wendepunkt, der gleichzeitig auch Tiefpunkt ist.	☐
Die Funktion hat drei Nullstellen.	☐

Argumente

Aufgabennummer: 1_245	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.5

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist der Graph einer reellen Funktion f.



Aufgabenstellung:

Geben Sie alle Argumente $x \in [-3; 9]$ an, für die gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

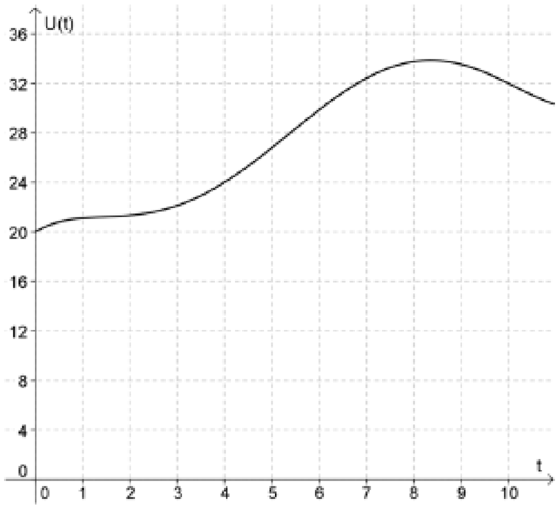
$x \in$ [___________]

Änderung der Spannung

Aufgabennummer: 1_224	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Die nachstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf t (in s) der Spannung U (in V) während eines physikalischen Experiments.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die absolute und die relative Änderung der Spannung während der ersten 10 Sekunden des Experiments!

absolute Änderung: _________ V

relative Änderung: _________ %

Differenzenquotient*

Aufgabennummer: 1_151	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Eine Funktion s: $[0; 6] \to \mathbb{R}$ beschreibt den von einem Radfahrer innerhalb von t Sekunden zurückgelegten Weg.

Es gilt: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$.

Der zurückgelegte Weg wird dabei in Metern angegeben, die Zeit wird ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Sekunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Differenzenquotienten der Funktion s im Intervall [0; 6] und deuten Sie das Ergebnis!

Anhang 3: Post- bzw. Follow-Up-Test

Seite 01

Liebe Schülerin / lieber Schüler!

S106
Einleitung

In den letzten Wochen hast du dich im Mathematikunterricht mit dem Inhaltsbereich "Differentialrechnung" auseinandergesetzt. Mithilfe dieses Fragebogens will ich nun erheben, ob du zu diesem Thema Grundvorstellungen aufgebaut hast und wenn ja, welche das sind.

Die Daten werden natürlich anonym erhoben und haben keinen Einfluss auf deine Mathematiknote. Trotzdem würde ich dich bitten, diesen Fragebogen bestmöglich auszufüllen, um mich so bei meiner Masterarbeit zu unterstützen.

Vielen Dank für deine Teilnahme!

Seite 02

Welche Schule besuchst du?

S101
Schule

- ◯ Alpen-Adria-Gymnasium Völkermarkt
- ◯ BRG Gröhrmühlgasse
- ◯ BRG Kepler
- ◯ BRG Petersgasse

Welche Klasse besuchst du?

S102
Klasse

Wie alt bist du?

S103
Alter

Welches Geschlecht hast du?

S104
Geschlecht

- ◯ männlich
- ◯ weiblich
- ◯ divers

Seite 03

Um die Ergebnisse der Studie vergleichen zu können, bitte ich dich, deinen persönlichen Code zu generieren. Die Daten werden aber trotzdem anonym erhoben und durch den Code sind keine Rückschlüsse auf deine Person möglich.

S105
Code

Der Code setzt sich wie folgt zusammen:
1. Anfangsbuchstabe des Vornamens deiner Mutter
2. zweiter Buchstabe deines Geburtsmonats
3. Anfangsbuchstabe deines Geburtsortes
4. die letzten beiden Buchstaben des Vornamens deines Vaters

Beispiel:
1. **E**velyn → **E**
2. N**o**vember → **o**
3. **W**olfsberg → **W**
4. Gera**ld** → **ld**

→ ergibt den Code: **EoWld**

Dein Code:

Seite 04

A101 Aufgabe 1

Die Ableitung f'(x) einer Funktion f an einer Stelle x kann unterschiedlich erklärt werden.

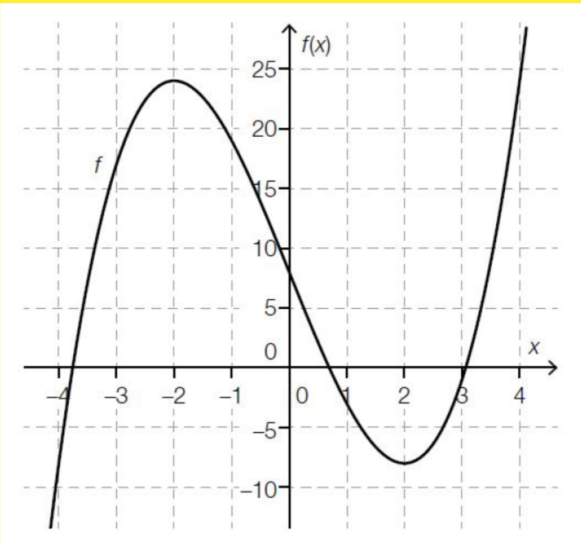
Bitte kreuze an, inwiefern die genannte Erklärung deinem eigenen Denken entspricht:

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Die Ableitung f'(x) gibt die momentane Änderungsrate an der Stelle x an.	○	○	○	○
Die Ableitung f'(x) gibt die Steigung der Tangente in einem Punkt des Graphen von f an.	○	○	○	○
Der Graph kann in der Nähe von x gut durch eine Gerade angenähert werden. Die Ableitung f'(x) gibt die Steigung dieser Geraden an.	○	○	○	○

Seite 05

A102 Aufgabe 2_1

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen x = -2 und x = 2 sind Extremstellen von f.



Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

- ☐ f'(-3) < 0
- ☐ f'(-2) = 0
- ☐ f'(0) = 0
- ☐ f'(2) = 0
- ☐ f'(3) < 0

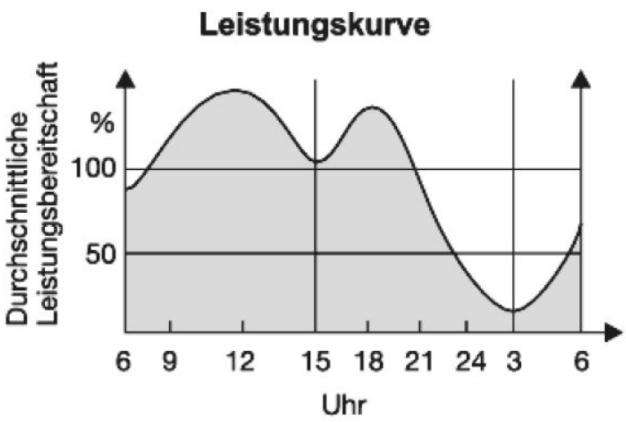
A103 Aufgabe 2_2

Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Die Tangente an eine Extremstelle des Graphen verläuft waagrecht.	○	○	○	○
Wenn man an eine Extremstelle heranzoomt, erscheint der Graph nahezu geradlinig und waagrecht.	○	○	○	○
In einer sehr kleinen Umgebung einer Extremstelle ist die Änderungsrate der Funktionswerte nahezu 0.	○	○	○	○

A104
Aufgabe 3_1

Die Leistungskurve, auch Arbeitskurve genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin / eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Website findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

In welchem Zeitintervall nimmt die Leistungsbereitschaft ab? Kreuze die richtige Aussage an.

- ◯ [6;9] Uhr
- ◯ [9;12] Uhr
- ◯ [12;18] Uhr
- ◯ [15;21] Uhr
- ◯ [21;3] Uhr
- ◯ [24;6] Uhr

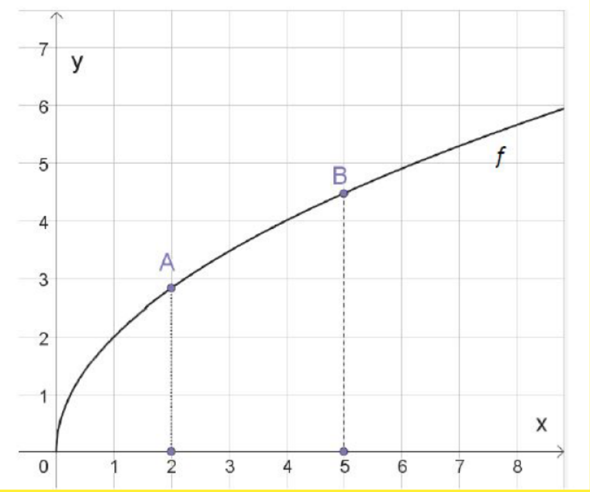
A105
Aufgabe 3_2

Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Die Änderungsrate der Leistungsbereitschaft ist im gesamten Intervall negativ.	◯	◯	◯	◯
Wenn man in diesem Intervall an den Funktionsgraphen heranzoomt, erscheint dieser an jeder Stelle wie eine Gerade, die eine negative Steigung hat.	◯	◯	◯	◯
Die Tangente an den Funktionsgraphen hat in diesem Intervall an jeder Stelle eine negative Steigung.	◯	◯	◯	◯

A106
Aufgabe 4_1

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Punkte A und B.



„Die erste Ableitung im Punkt B ist größer als im Punkt A."
Ist diese Aussage richtig oder falsch?

- ◯ richtig
- ◯ falsch

A107
Aufgabe 4_2

Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Wenn man an die Punkte A und B heranzoomt, erscheint der Graph jeweils lokal wie eine Gerade. Je größer die Steigung dieser Geraden, desto größer ist auch die erste Ableitung in diesem Punkt.	◯	◯	◯	◯
Je größer die Steigung der Tangente in einem Punkt, desto größer ist auch die erste Ableitung in diesem Punkt.	◯	◯	◯	◯
Wenn der Graph die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit darstellt, ist die erste Ableitung in jenem Punkt größer, in dem sich die Größe schneller ändert.	◯	◯	◯	◯

A108
Aufgabe 5_1

Ein bestimmter Behälter wird mit Traubensaft befüllt. Die Funktion f beschreibt den Füllstand des Traubensafts im Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t. Dabei gilt:

- Der Füllvorgang erfolgt ohne Unterbrechung.

- Die Zunahme des Füllstands nimmt laufend (d.h. streng monoton) ab.

t ... Zeit seit Beginn des Füllvorgangs in *s*

f(t) ... Füllstand des Traubensafts im Behälter zur Zeit t in *cm*

t_1, t_2 ... zwei bestimmte Zeitpunkte während des Füllvorgangs mit $t_1 < t_2$

Kreuze die richtige Aussage an.

- ◯ Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen negativen Wert.
- ◯ Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.
- ◯ Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 den gleichen Wert wie die 1. Ableitung von f an der Stelle t_2.
- ◯ Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.
- ◯ Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.

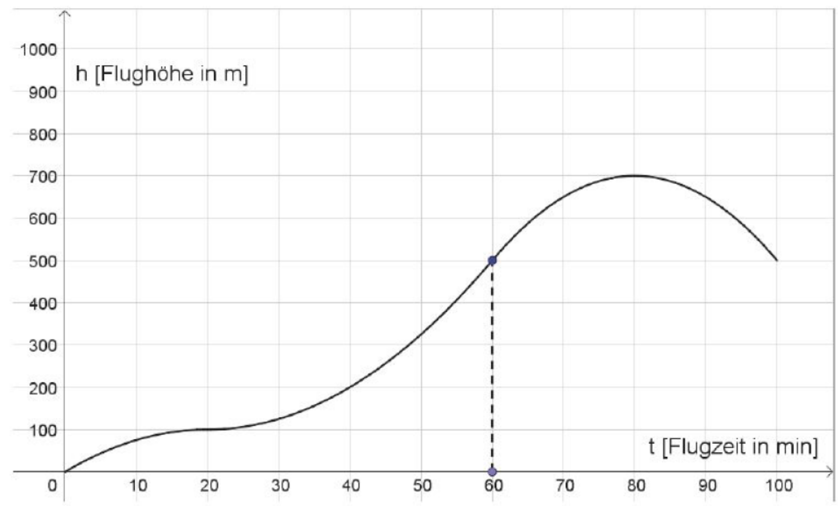
Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

A109
Aufgabe 5_2

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Der Graph kann zu jedem Zeitpunkt durch eine Gerade angenähert werden, dessen Steigung mit der Zeit abnimmt.	◯	◯	◯	◯
Die Änderungsrate der Zunahme des Füllstandes ist negativ.	◯	◯	◯	◯
Die Steigung der Tangente nimmt mit der Zeit immer weiter ab.	◯	◯	◯	◯

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flughöhe *h* eines Segelflugzeuges in Abhängigkeit von der Zeit *t*.

A110
Aufgabe 6_1



Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

- ☐ Das Flugzeug steigt zum Zeitpunkt t = 60 am schnellsten.
- ☐ h''(60) < 0
- ☐ Die Flughöhe nimmt zum Zeitpunkt t = 60 ab.
- ☐ h''(60) = 0
- ☐ h''(60) > 0

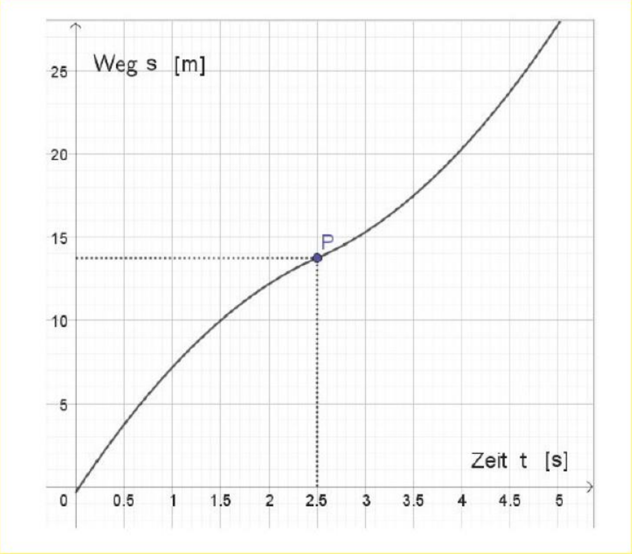
Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

A111
Aufgabe 6_2

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Die Steigung der Tangente ist zum Zeitpunkt t = 60 am größten.	◯	◯	◯	◯
Die Änderungsrate der Höhe ist zum Zeitpunkt t = 60 am größten.	◯	◯	◯	◯
Der Graph kann zu jedem Zeitpunkt durch eine Gerade angenähert werden. Diese hat zum Zeitpunkt t = 60 die größte Steigung.	◯	◯	◯	◯

A112
Aufgabe 7_1

Betrachtet wird die Fahrt eines Fahrrads. Folgender Graph zeigt den Zusammenhang zwischen der Zeit *t* und dem zurückgelegten Weg *s*.



Kreuze die beiden zutreffenden Aussagen an.

- ☐ Die Geschwindigkeit des Fahrrads nimmt im gesamten betrachteten Zeitintervall zu.
- ☐ Die Geschwindigkeit des Fahrrads ist zum Zeitpunkt t = 2,5 *s* am kleinsten.
- ☐ Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 2,5 *s* beträgt ungefähr 14,8 *m/s*.
- ☐ Die Geschwindigkeit des Fahrrads ist zum Zeitpunkt t = 2,5 *s* am größten.
- ☐ Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 2,5 s beträgt ungefähr 2,2 *m/s*.

A113
Aufgabe 7_2

Bitte kreuze an, inwiefern die folgenden Erklärungen deiner eigenen Denkweise beim Lösen dieser Aufgabe entsprechen.

	Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise.			Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise.
Die Änderungsrate der dargestellten Funktion ist die Geschwindigkeit des Fahrrads.	○	○	○	○
Die Steigung der Tangente entspricht der Geschwindigkeit des Fahrrads.	○	○	○	○
Der Graph kann zu jedem Zeitpunkt durch eine Gerade angenähert werden. Die Steigung dieser Gerade entspricht der Geschwindigkeit des Fahrrads.	○	○	○	○

Vielen Dank für Deine Teilnahme!

Literaturverzeichnis

Bayaga A., Mthethwa M. M., Bossé M. J. & Williams D. (2019): Impacts of implementing GeoGebra on eleventh grade student's learning of Euclidean geometry. In *South African Journal of Higher Education, 33, 6* (S. 32–54).

Blum W., Borromeo Ferri R. & Maaß K. (Hrsg.) (2012): *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Gabriele Kaiser*. Wiesbaden: Springer.

Blum W. & Törner G. (1983): *Didaktik der Analysis.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bortz J. & Döring N. (2009): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human und Sozialwissenschaftler*. Heidelberg: Springer.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019): *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Stand: April 2019.*

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2022): *Aufgabenpool.* www.prod.aufgabenpool.at/ahs/. Verifiziert am 14.09.2022 um 08:14.

Danckwerts R. & Vogel D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten.* München: Spektrum Akademischer Verlag.

DATAtab Team (2023a): *t-Test für abhängige Stichproben.* https://datatab.de/tutorial/abhängiger-t-test. Verifiziert am 28.02.2023 um 11:13.

DATAtab Team (2023b): *t-Test für unabhängige Stichproben.* https://datatab.de/tutorial/unabhängiger-t-test. Verifiziert am 28.02.2023 um 11:17.

Edwards J.-A. & Jones K. (2006): Linking Geometry and Algebra with GeoGebra. In: *MATHEMATICS TEACHING, incorporation MicroMath 194* (S. 28–30).

Elschenbroich H.-J. (2005): Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen. In: Barzel B., Hußmann S. & Leuders, T. (Hrsg): *Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht.* Berlin.

Elschenbroich H.-J. (2015): Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. In: In Caluori, F.; Linneweber-Lammerskitten H.; & Streit C. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM-Verlag.

Emaikwu S. O., Iji C. & Abari T. (2015): Effect of GeoGebra on Senior Secondary School Students' Interest and Achievement in Statistics in Makurdi Local Government Area of Benue State, Nigeria. In: *IOSR Journal of Mathematics, 11 (3)* (S. 14–21).

Embacher F. (2003): *Das Konzept der Lernpfade von mathe online. Beitrag zum 6. Business-Meeting des Forum Neue Medien.* Klagenfurt.

GeoGebra (2023a). *Was ist GeoGebra?* https://www.geogebra.org/about?lang=de. Verifiziert am 23.02.2023 um 08:28.

GeoGebra (2023b). *Ableitung (Befehl).* https://wiki.geogebra.org/de/Ableitung_(Befehl). Verifiziert am 23.02.2023 um 08:30.

GeoGebra (2023c). *Der GeoGebraBook Editor*. https://wiki.geogebra.org/de/Der_GeoGebraBook_Editor. Verifiziert am 23.02.2023 um 08:37.

Gómez-Chacón I. & Joglar Prieto N. (2010): Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach. In: *Educ. Matem. Pesq, Sao Paulo, 12 (3)* (S. 485–513).

Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V. & Weigand H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Heidelberg: Springer.

Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V. & Weigand H.-G. (2020): *Basic Mental Models of Integrals – Theoretical Conception, Development of a Test Instrument, and first Results.* ZDM, Mathematics Education.

Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V. & Weigand H.-G. (2021): *Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI), Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral.*

Griesel H., vom Hofe R. & Blum W. (2019): *Das Konzept der Grundvorstellung im Rahmen der mathematischen und kognitionspsychologischen Begrifflichkeit in der Mathematikdidaktik.* Kassel: Springer.

Hahn S. & Prediger S. (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In: *Journal für Mathematikdidaktik, 2008, 29 (3–4)* (S. 163–198).

Hefendehl-Hebeker L., vom Hofe R., Büchter A., Humenberger H., Schulz A. & Wartha S. (2019): Subject-matter didactics. In: Jahnke H. N. & Hefendehl-Hebeker (Hrsg.), *Traditions in German-speaking mathematics education research.* Cham: Springer (S. 25–59).

Heugl H. (2014): *Mathematikunterricht mit Technologie. Ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl an Aufgaben. 9. bis 13. Schulstufe.* Linz: Veritas-Verlag.

Hock N. (2021): *Förderung von diagnostischen Kompetenzen. Eine empirische Untersuchung mit Mathematik-Lehramtsstudierenden.* Springer (e-Book).

Hohenwarter J., Hohenwarter M. & Lavicza Z. (2008): Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. In: *JI. of Computer in Mathematics and Science Teaching, 28 (2)* (S. 135–146).

Hohenwarter M. & Jones K. (2007): Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In: D. Küchemann (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27 (3)* (S. 126–131).

Jedtke E. & Hankeln C. (2019): DiWerS: Ein Fachdidaktik-Seminar zum Einsatz digitaler Lernpfade in der Schule. In: Pinkernell G. & Schacht F. (Hrsg.), *Digitalisierung fachbezogen gestalten. Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Herbsttagung vom 28. bis*

29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Kaenders R. & Schmidt R. (2011): Zu einem tieferen Mathematikverständnis. In: R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 1–11). Wiesbaden: Springer.

Kirsch, A. (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. In: *Der Mathematikunterricht*, *1979 (3)* (S. 25–41).

Klinger M. (2017): *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis.* Springer (e-Book).

Lechner J. (o. J.): *Grundwissen, Grundvorstellungen, Grundtätigkeiten.*

Li Q. & Ma X. (2010): *A Meta-analysis of the Effects of Computer Technology on School Students' Mathematics Learning.* Springer.

Lindenbauer E. (2021): *FLINK in Mathe. Förderung von Lernenden durch interaktive Materialien für einen nachhaltigen Kompetenzerwerb in Mathematik.*

Lindner A. (2015): Technologieeinsatz im Mathematikunterricht – Fortbildungskurse in OÖ. In: L. Del Chicca & M. Hohenwarter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Dialog. Perspektiven und Wege* (S. 9–20). Linz: Trauner Verlag.

Majerek D. (2014): Application of GeoGebra for teaching Mathematics. In: *Advances in Science and Technology Research Journal, 8 (24)* (S. 51–54).

Malle G. (o. J. a): *Grundvorstellungen im Mathematikunterricht.*

Malle G. (o. J. b): *Grundvorstellungen zum Differenzen- und Differentialquotienten.*

Mudaly V. & Fletcher T. (2019): The effectiveness of GeoGebra when teaching linear functions using the iPad. In *Problems of Education in the 21st Century*, *77, 1* (S. 55–81).

Murphy D. (2016): A literature review: *The effect of implementing technology in a high school mathematics classroom*. In International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2 (2), S. 295–299.

Neumann R. (2018): *Zum Einfluss von Computeralgebrasystemen auf mathematische Grundfertigkeiten. Eine empirische Bestandsaufnahme.* Wiesbaden: Springer.

Novustat (2023): *Liker-Skala im Fragebogen sinnvoll angewendet.* https://novustat.com/statistik-blog/likert-skala-fragebogen-anwendung.html. Verifiziert am 27.02.2023 um 11:34.

Övez F. T. D. (2018): The Impact of Instructing Quadratic Functions with the Use of GeoGebra Software on Students' Achievement and Level of Reaching Acquisitions. In: *International Education Studies, 11 (7)* (S. 1–11).

Perera M. & Aboal D. (2018): *The Impact of a Mathematics Computer-Assisted Learning Platform on Students' Mathematics Test Scores.*

Pöchtrager H. (2015): Entdeckendes Lernen mit GeoGebra. In: L. Del Chicca & M. Hohenwarter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Dialog. Perspektiven und Wege* (S. 155–169). Linz: Trauner Verlag.

Rasch B., Friese M., Hofmann W. & Naumann E. (2006): *Quantitative Methoden. Einführung in die Statistik. Band 1.* Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Rechtsinformation des Bundes (2023). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 23.02.2023.* https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568. Verifiziert am 23.02.2023 um 08:34.

Reinmann G. & Mandl H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In: A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch. 5., vollständig überarbeitete Auflage* (S. 613–658). Basel: Beltz Verlag.

Rieß M. (2018): *Zum Einfluss digitaler Werkzeuge auf die Konstruktion mathematischen Wissens.* Wiesbaden: Springer.

Roth J. (o. J.): *Fachdidaktische Grundlagen. Modul 1.3.*

Roth J., Süss-Stepancik E. & Wiesner H. (Hrsg.) (2015): *Medienvielfalt im Mathematikunterricht. Lernpfade als Weg zum Ziel.* Wiesbaden: Springer.

Salle A. & Clüver T. (2021): *Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens.* Springer.

Salzger B. (o. J.): *Grundvorstellungen bei der Einführung der beiden Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient.*

Schmidt R. (2009): *Selbstgesteuertes Lernen durch Lernpfade.*

Seebach G. (2011). Ableitungsregeln mit GeoGebra selbst entdecken – nicht nur für Polynome. In: R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 84–102). Wiesbaden: Springer.

Steinbauer R. & Stüss-Stepancik E. (2019): *Schulmathematik Analysis.*

Tietze U.-P., Klika M. & Wolpers H. (1997): *Mathematik in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Ulm V., Oldenburg R., Drösemeier A., Greefrath G., Siller H.-S. & Weigand H.-G. (2018): Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen – eine theoretische Konzeption und empirische Überprüfung. In: Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018.* Münster: WTM-Verlag.

Vasquez D. E. (2015): *Enhancing student achievement using GeoGebra in a technology rich envoironment. Masterarbeit.* Pomona: Faculty of California State Polytechnic University.

Velichová D. (2011): Interactive Maths with GeoGebra. In: *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 2011 (6)* (S. 31–35).

Vollrath H.-J. (1984): *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Vollrath H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik 10* (S. 1–43).

Vom Hofe R. (1995): *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe R., Blum W. & Pekrun R. (2005): On the role of "Grundvorstellungen" for the development of mathematical literacy – First results of the longitudinal study PALMA. In: *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2005, 4 (2)* (S. 67–84).

Wassie Y. A. & Zergaw G. A. (2019): Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. In: *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2019, 15 (8), em1734* (S. 1–11).

Winter S. (2000): *Quantitative vs. Qualitative Methoden.* http://nosnos.synology.me/MethodenlisteUniKarlsruhe/imihome.imi.uni-karlsruhe.de/nquantitative_vs_qualitative_methoden_b.html. Verifiziert am 27.02.2023 um 09:22.

Wolf S. (2008): *Der Methodenstreit quantitativer und qualitativer Sozialforschung unter besonderer Berücksichtigung der grundlegenden Unterschiede beider Forschungstraditionen.* Augsburg.

Yatim S. S. K. M., Saleh S. Zulnaidi H., Yew W. T. & Yatim S. A. M. (2022): Effects of brain-baised teaching approach integrated with GeoGebra (b-geo module) on students' conceptual understanding. *In: International Journal of Instruction, 15 (1)* (S. 327–346).

Zulnaidi H. & Zamri S. N. A. S. (2016): The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. In: *EURASIE Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13 (6)* (S. 2155–2180)**.**

Abbildungsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst, dabei die Richtlinien guter wissenschaftlicher Praxis eingehalten und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet, sowie die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht zu haben. Die Arbeit wurde bisher in identer oder ähnlicher Form an keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

Ort, Datum	Unterschrift

Signiert von:	Sabrina Stimpfl
Datum:	07.04.2023 10:20:20

A TRUST

Dieses Dokument ist digital signiert!
Dieses mit einer qualifizierten elektronischen Signatur versehene Dokument hat gemäß Art. 25 Abs. 2 der Verordnung (EU) Nr 910/2014 vom 23. Juli 2014 ("eIDAS-VO") die gleiche Rechtswirkung wie ein handschriftlich unterschriebenes Dokument.

Prüfinformation: Informationen zur Prüfung der elektronischen Signatur finden Sie unter: www.a-trust.at/pdf