

***Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum
GeoGebra-Einsatz im Inhaltsbereich Analysis
der Sekundarstufe 2 an allgemeinbildenden
höheren Schulen***

Sabrina Stimpfl

Eingereicht an der Pädagogischen Hochschule Steiermark
zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Education (BEd)

Studienjahrgang: 2016/WS

Matrikelnummer: 01615001

Studienfachbereiche:

Mathematik

Darstellende Geometrie

Betreuer:

Prof. Mag. Dr. rer. nat. Karl-Heinz Graß

Graz, Dezember 2020

Abstract

The use of higher technology for the written central high school diploma in mathematics was made compulsory for the first time in May 2018. Since then, it has also been the task of teachers to familiarize students with higher technology and to integrate it into mathematics lessons in order to prepare students for the Matura in the best possible way.

Higher technical aids have many advantages, since visualizations promote mathematical understanding and tasks can be linked better. At the same time, however, it can happen that students rely too much on technology and thus lose important, basic mathematical knowledge. Teachers must therefore find a good middle way to successfully integrate the higher technological tools into mathematics lessons so that students can benefit from them fully without losing basic mathematical skills.

In this bachelor thesis, I will cover the rational use of higher technical aids from a didactic point of view, using GeoGebra, a prime example for higher technical aid, in the field of analysis in secondary level 2.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Abkürzungsverzeichnis..... | 4 |
| Definitionen | 5 |
| 1. Einleitung..... | 6 |
| 2. Höhere technische Hilfsmittel | 7 |
| 2.1. Casio Classpad | 8 |
| 2.2. TI-Nspire™ CX II-T | 8 |
| 2.3. GeoGebra | 8 |
| 3. Vor- und Nachteile..... | 10 |
| 3.1. Vorteile..... | 10 |
| 3.2. Nachteile | 14 |
| 4. Inhaltsbereiche der Analysis: Sinnvoller Einsatz von GeoGebra..... | 17 |
| 4.1. Darstellen von Funktionen | 18 |
| 4.1.1. Zu erreichende Kompetenzen | 18 |
| 4.1.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz..... | 19 |
| 4.2. Untersuchen von Funktionen | 21 |
| 4.2.1. Zu erreichende Kompetenzen | 21 |
| 4.2.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz..... | 22 |
| 4.3. Aufsuchen von Funktionen | 24 |
| 4.3.1. Zu erreichende Kompetenzen | 24 |
| 4.3.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz..... | 24 |
| 4.4. Differentialrechnung | 26 |
| 4.4.1. Zu erreichende Kompetenzen | 26 |
| 4.4.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz..... | 27 |
| 4.5. Integralrechnung | 29 |
| 4.5.1. Zu erreichende Kompetenzen | 29 |
| 4.5.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz..... | 29 |
| 5. Conclusio | 34 |
| Literaturverzeichnis | 38 |

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|--------|--|
| AHS | allgemeinbildende höhere Schule |
| CAS | Computeralgebrasystem |
| DMS | Dynamische Mathematiksoftware |
| KISS | „Keep it simple and short“ |
| SEK II | Sekundarstufe 2 |
| sRDP | standardisierte Reife- und Diplomprüfung |

Definitionen

Grundvorstellung

Günther Malle (ohne Jahr) erklärt Grundvorstellungen wie folgt: „Viele Vorstellungen, die hinter mathematischen Inhalten stehen, sind so wichtig und für Allgemeinbildung unverzichtbar, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnet. Diese Grundvorstellungen sind nicht angeboren, sie müssen erlernt werden [...]“ (Malle, ohne Jahr).

Entdeckendes Lernen

„Die Lernenden setzen sich aktiv mit Problemen auseinander, sie sammeln selbstständig eigene Erfahrungen, sie führen bei passenden Gelegenheiten Experimente durch und erlangen auf diese Weise neue Einsichten in komplexe Sachverhalte und Prinzipien. [...] Der so definierte Vorgang des Entdeckens ist eine notwendige Bedingung dafür, dass Lernende über das oberflächliche Wissen hinaus auch Problemlösungsstrategien und heuristische Methoden erwerben, die ja ein wichtiges Unterrichtsziel darstellen. Wer entdeckend lernt, wird so lange weiterlernen, bis die Neugierde gestillt und die noch offenen Fragen beantwortet werden. Um entdeckendes Lernen zu fördern, sollten die Lernenden möglichst oft mit realen Situationen konfrontiert werden, in denen sie die Chance haben, neues Wissen selbstständig und explorativ zu erwerben.“ (Reinmann & Mandl, 2006, S. 634)

Funktionenplotter

Ein Funktionenplotter ist ein Computerprogramm, das Graphen mathematischer Funktionen berechnet und zeichnet (Academic, 2020).

1. Einleitung

Beim Reifeprüfungstermin im Mai 2018 wurde erstmals der Einsatz höherer Technologie für die schriftliche Zentralmatura in Mathematik verpflichtend eingeführt (Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung, 2019). Seit diesem Zeitpunkt ist es die Aufgabe der Lehrerinnen und Lehrer, den Schülerinnen und Schülern höhere technische Hilfsmittel näherzubringen und im Mathematikunterricht zu integrieren, um so die Lernenden bestmöglich auf die Matura vorzubereiten. Elektronische Hilfsmittel bringen viele Vorteile mit sich, da durch Visualisierungen das mathematische Verständnis gefördert wird und Aufgaben besser verknüpft werden können (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1). Gleichzeitig kann es aber passieren, dass sich die Heranwachsenden zu sehr auf die Technologie verlassen und so sukzessive wichtige, grundlegende mathematische Kenntnisse verloren gehen (Lindner, 2015, S. 16). Die Lehrpersonen müssen daher einen guten Mittelweg finden, um die höheren technischen Hilfsmittel erfolgreich in den Mathematikunterricht einzubeziehen, sodass die Jugendlichen möglichst davon profitieren können, ohne dass mathematische Fähigkeiten abhandenkommen.

Ziel dieser Bachelorarbeit ist es, fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum GeoGebra-Einsatz aufzuzeigen, damit Schülerinnen und Schüler bestmöglich vom Technologieeinsatz profitieren. In Zuge dessen soll die Forschungsfrage *„In welchen Bereichen ist es sinnvoll, GeoGebra im Analysisunterricht in der SEK II an der AHS zu integrieren?“* beantwortet werden.

Die Arbeit beginnt mit der Vorstellung der elektronischen Hilfsmittel, die zur sRDP zugelassen sind. Der Fokus liegt auf GeoGebra, da diese Mathematiksoftware der Kern dieser Abhandlung ist. Des Weiteren werden die Vor- und Nachteile aufgezeigt, die der Einsatz höherer technischer Hilfsmittel mit sich bringt. Als Grundlage dafür dienen zahlreiche Studien, die eine Leistungsverbesserung der Schülerinnen und Schüler durch den Einsatz von Technologie belegen. Schließlich sollen fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum GeoGebra-Einsatz in ausgewählten Inhaltsbereichen der Analysis in der SEK II an der AHS gefunden werden. Basierend auf den Lehrplänen werden die zu erreichenden Kompetenzen ausgearbeitet. Anhand dessen soll offengelegt werden, wie der Technologieeinsatz beim Erreichen dieser Kompetenzen und beim Aufbau von Grundvorstellungen im Mathematikunterricht behilflich sein und den Jugendlichen ein bestmögliches Lernen geboten werden kann.

2. Höhere technische Hilfsmittel

Seit dem Haupttermin der sRDP im Mai 2018 ist der Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln verpflichtend (BMBWF, 2019). Folgende Minimalanforderungen an die Technologie sind festgelegt worden (SRDP, 2020):

- Grundlegende Funktionen zur Darstellung von Funktionsgraphen
- Grundlegende Funktionen zum numerischen Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
- Grundlegende Funktionen zur Ermittlung von Ableitungs- bzw. Stammfunktionen
- Grundlegende Funktionen zur numerischen Integration
- Grundlegende Funktionen zur Unterstützung bei Methoden und Verfahren der Stochastik

Moderne Technologien müssen demnach folgende Werkzeuge anbieten (Heugl, 2014, S. 15):

- Numerisches Rechenwerkzeug
- CAS Werkzeug
- Grafikwerkzeug
- Tabellenkalkulationswerkzeug
- Geometriewerkzeug
- Statistikwerkzeug

Drei der in der Schule hauptverbreiteten technischen Hilfsmittel erfüllen diese Anforderungen und haben in den letzten Jahren eine sichere Anwendung im Mathematikunterricht gefunden: Casio Classpad, TI-Nspire™ CX II-T und GeoGebra.

In den folgenden Unterkapiteln werden die oben genannten elektronischen Hilfsmittel kurz vorgestellt, um einen prägnanten Überblick über die verfügbaren Mittel im Mathematikunterricht zu bekommen. Der Fokus dieser Arbeit liegt jedoch auf der Mathematiksoftware GeoGebra.

2.1. Casio Classpad

Beim Casio Classpad handelt es sich um einen Grafikrechner mit CAS inklusive eines hochauflösenden und berührungssensitiven Displays. Dieser programmierbare Taschenrechner erfüllt alle elementaren mathematischen Anforderungen, sowie die graphische Darstellung von Funktionen, Differential- und Integralrechnung. Bereiche der Statistik werden ebenfalls abgedeckt (Casio Europe, 2020).

2.2. TI-Nspire™ CX II-T

Dieser programmierbare Grafikrechner ermöglicht die einfache Eingabe und Berechnungen in mathematischer Schreibweise wie in den Schulbüchern, die graphische Darstellung und Analyse von Funktionen, das Zeichnen sowie Analysieren geometrischer Objekte und weitere Anwendungen im Bereich Statistik (Texas Instruments, 2020).

2.3. GeoGebra

GeoGebra ist eine kostenlose DMS, die Geometrie, Algebra, Tabellen, Zeichnungen, Statistik und Analysis in einem einfach zu bedienenden Softwarepaket verbindet. Die dynamische Verbindung von Geometrie, Algebra und Tabellen ist ein großer Vorteil, den der Einsatz des Programms im Mathematikunterricht mit sich bringt (GeoGebra, 2020a).

GeoGebra ist eine für nicht kommerzielle Nutzung frei verfügbare Open-Source-Software (GeoGebra, 2020a). Diese wurde nach dem ‚KISS‘-Prinzip (‚keep it short and simple‘) entwickelt, sodass die Nutzerinnen und Nutzer die Software intuitiv und ohne allzu großer Computerkenntnisse bedienen können (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008, S. 138.). Außerdem wurde GeoGebra speziell für den Mathematikunterricht entwickelt, wodurch dieses Programm an dessen spezifische Anforderungen angepasst worden ist (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1).

Durch die einfache Handhabung der Software und die zahlreichen Befehle, welche diese zu bieten hat, wird der Mathematikunterricht durch den GeoGebra-Einsatz sehr bereichert. Viele rechnerische Tätigkeiten werden auf den Computer ausgelagert, wodurch im Unterricht der Fokus auf andere mathematische Fähigkeiten gelegt werden kann. Das Augenmerk liegt dann beispielsweise auf der Planung von Lösungswegen und

Interpretation bzw. Argumentation von Ergebnissen im Sachkontext (Lindner, 2015, S. 16).

Der Einsatz von Technologie bringt jedoch nicht nur Vorteile mit sich – die Nachteile, die bei einem zu intensiven bzw. falschen Technologieeinsatz mitschwingen, sollten nicht außer Acht gelassen werden.

Diese Vor- und Nachteile werden im nächsten Kapitel behandelt.

3. Vor- und Nachteile

Beschäftigt man sich mit dem Technologieeinsatz im Mathematikunterricht, findet man in der Literatur vorwiegend positive Argumente: Beginnend damit, dass die Schülerinnen und Schüler durch die aktive Beteiligung interessierter und motivierter am Unterricht teilnehmen, bis hin zu wissenschaftlichen Studien, die belegen, dass sich durch den Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln die Leistungen der Schülerinnen und Schüler verbessern (unter anderem: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014). Dies sind nur einige Vorteile, die die Verwendung elektronischer Hilfsmittel mit sich bringt. Zahlreiche Studien legen die Stärken des Einsatzes von höherer Technologie offen, jedoch wird oft übersehen, dass auch Nachteile mit einhergehen können.

In den folgenden Unterkapiteln werden die Vorteile, aber auch die auftretenden Nachteile des Technologieeinsatzes ausgearbeitet. Im Mittelpunkt dieser Bachelorarbeit steht der Inhaltsbereich Analysis in der SEK II, weshalb auch die Pros und Contras in Bezug auf den Analysisunterricht ausgearbeitet werden. Einige dieser Vor- und Nachteile werden im Folgenden aber sehr allgemein dargestellt, da diese in diversen Themengebieten der Mathematik eine Rolle spielen.

3.1. Vorteile

Ein genereller Pluspunkt, den die DMS GeoGebra mit sich bringt, ist die leichte Bedienung und Handhabung, da dieses Computerprogramm nach dem KISS-Prinzip entwickelt worden ist. So müssen die Nutzenden über keine allzu großen Computerkenntnisse verfügen (Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2008, S. 138), denn die einfache Benutzeroberfläche und die zahlreichen zur Verfügung stehenden Werkzeuge ermöglichen eine problemlose Anwendung (Bayaga, Bossé & Williams, 2019, S. 34). Außerdem ist GeoGebra eine Open-Source-Software, die für nicht kommerzielle Zwecke frei nutzbar ist, sodass sich jede und jeder dieses Programm vom Internet herunterladen kann. Des Weiteren ist diese Mathematiksoftware in zahlreichen Sprachen verfügbar und kann nahezu überall auf der Welt verwendet werden (GeoGebra, 2020a), was für den GeoGebra-Einsatz im Mathematikunterricht spricht.

Die Themengebiete Algebra und Geometrie werden in der Schule oft getrennt unterrichtet. Dies hat zur Folge, dass die Schülerinnen und Schüler des Öfteren den Konnex zwischen den algebraischen und graphischen Darstellungen von mathematischen

Objekten nicht erkennen können (Hohenwarter, Hohenwarter, & Lavicza 2008, S. 137f.). Der Inhaltsbereich Analysis ist jedoch eine Verbindung aus Algebra und Geometrie (Zulnaidi & Zamri, 2016, S. 2157f.), weshalb es essentiell ist, dass die Lernenden Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Darstellungsmöglichkeiten herstellen können. Genau bei diesem Herstellen von Beziehungen kann die Mathematiksoftware im Analysisunterricht unterstützend sein, denn durch die verschiedenen, gleichzeitig verfügbaren Fenster und Visualisierungen schafft es GeoGebra, Geometrie und Algebra miteinander zu verbinden. So können die Heranwachsenden den Zusammenhang der geometrischen Aspekte und deren algebraischen Darstellungen entdecken (Edwards & Jones, 2006, S. 28) und eine Verbindung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen schaffen (Övez, 2018, S. 3).

GeoGebra bietet aber nicht nur diverse Visualisierungsmöglichkeiten im Algebra- und Geometriefenster, sondern verknüpft sie auch miteinander. Verändert man also beispielsweise die Funktionsgleichung im Algebrafenster, ändert sich dementsprechend auch der Funktionsverlauf im Grafikfenster (Majerek, 2014, S. 52). Durch diese Möglichkeit können die Lernenden Funktionen und andere mathematische Objekte aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten, was wiederum das Erkennen von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Darstellungsformen erleichtert (Kaenders & Schmidt, 2011, S.1).

Des Weiteren ist bei der DMS alles dynamisch. Mithilfe von Schiebereglern können Parameter verändert werden und die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, die Auswirkungen auf den Funktionsverlauf im Geometriefenster und gleichzeitig auf die Funktionsgleichung im Algebrafenster beobachten. So kann simultan das Vorstellungsvermögen der Lernenden gestärkt, sowie das entdeckende Lernen und Experimentieren gefördert werden, was wiederum zu einem größeren mathematischen Verständnis führt und den Erwerb von neuem Wissen erleichtert (Bayaga, Bossé & Williams, 2019, S. 37). Zusätzlich wird das entdeckende Lernen gefördert, da die Heranwachsenden ihre eigenen Ideen und Vorstellungen visualisieren und dynamisch verändern können (Vasquez, 2015, S. 10).

So bekommen die Jugendlichen durch den Technologieeinsatz die Chance, selbstständig zu lernen:

„Jeder Sinn, den ich selbst für mich einsehe, jede Regel, die ich aus Einsicht selber aufgestellt habe, treibt mich mehr an, überzeugt mich stärker und motiviert

mich höher, als von außen gesetzter Sinn, den ich nicht oder kaum durchschaue und der nur durch Autorität oder Nicht-Hinterfragen oder äußerliche bleibende Belohnungssysteme gesetzt ist.“ (Reich, 2008, S. 95)

Der Einsatz von Technologie unterstützt also den Lernprozess, weil die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit bekommen, autonom und eigenverantwortlich zu lernen und ihre Berechnungen zu kontrollieren (Neumann, 2018, S. 17f.).

Dadurch, dass die Jugendlichen mathematische Themengebiete selbstständig erkunden können, ermöglicht GeoGebra einen aktiven Mathematikunterricht, was sich erheblich von den *alten* Unterrichtsmethoden unterscheidet. Mathematik wird oft als Fach angesehen, in dem die Lehrperson den Stoff an der Tafel vorträgt und dieser von den Schülerinnen und Schülern passiv aufgenommen wird. Durch den Technologieeinsatz ändert sich dieses Bild, da die Lernenden eine aktivere Rolle im Unterricht einnehmen und die Möglichkeit haben, nicht nur mit der Lehrperson, den Klassenkameradinnen und Klassenkameraden, sondern auch mit dem Inhalt zu interagieren (Mudaly & Fletcher, 2019, S. 63). So kann eine interaktive Lernumgebung geschaffen werden, was wiederum zu einem effektiveren Mathematikunterricht führt (Vasquez, 2015, S. 14). Der Computer kann außerdem die Rechenarbeit übernehmen, wodurch im Unterricht komplexere und anwendungsorientiertere Aufgaben Platz finden. Zudem wird den Heranwachsenden die Möglichkeit geboten, wirklichkeitsnah zu modellieren, was wiederum ein Bereich der Analysis ist (Neumann, 2018, S. 18). Des Weiteren kann der Fokus auch auf andere Kompetenzen, wie z.B. die Interpretation der Ergebnisse im gegebenen Sachkontext, gelegt werden (Lindner, 2015, S. 16).

Der wohl größte Pluspunkt beim GeoGebra-Einsatz ist aber, dass dieser *neue* Unterricht auch den Schülerinnen und Schülern zusagt. Einige Studien haben gezeigt, dass die Lernenden durch den Technologieeinsatz ein größeres Interesse am Erlernen von Mathematik haben und mit größerer Motivation am Unterricht teilnehmen. In weiterer Folge verbessern sich dadurch die mathematischen Leistungen der Jugendlichen (unter anderem: Emaikwu & Abari, 2015, S. 20; Gómez-Chacón & Joglar Prieto, 2010, S. 503; Weinhandl, Hohenwarter, Schallert & Lavicza, 2020, S. 3).

Die Vorteile, die der Einsatz der Mathematiksoftware GeoGebra mit sich bringt, lassen sich unter vier wesentlichen Funktionen zusammenfassen (Heugl, 2014, S. 9-13):

- **Rechenfunktion**

Der Einsatz von Technologie bietet die Möglichkeit, komplexe Rechenoperationen auszulagern. Dadurch geht im Unterricht keine Zeit beim Rechnen verloren und man hat die Möglichkeit, umfassendere und anwendungsorientiertere Aufgaben in den Mathematikunterricht zu integrieren. Der Fokus verschiebt sich somit vom einfachen Ausrechnen von Rechnungen auf die Überprüfung der Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler müssen lernen, alle Resultate auf ihre Richtigkeit und Plausibilität zu überprüfen.

- **Visualisierungsfunktion**

GeoGebra bietet nicht nur die Möglichkeit der graphischen Darstellung, sondern diese ist auch parallel zu anderen Visualisierungen (algebraischen und/oder Wertetabellen) verfügbar. Dies regt die Heranwachsenden dazu an, Vermutungen aufzustellen und unterstützt das Reflektieren der Lösungen. Des Weiteren werden die Auswirkungen von Parameteränderungen auf den Funktionsverlauf sofort sichtbar, da bei GeoGebra alles dynamisch miteinander verknüpft ist. Dies bietet im Unterricht einen Ausgangspunkt für interessante Diskussionen und Entdeckungen.

- **Experimentierfunktion**

Durch den Technologieeinsatz wird die experimentelle Phase des Lernens unterstützt, indem die Schülerinnen und Schüler selbstständig Hypothesen aufstellen, diese überprüfen und aus den Resultaten neue Erkenntnisse gewinnen können.

- **Modellierungsfunktion**

Da die Technologie komplexe Rechnungen übernimmt, ist es möglich, praxisnahe Aufgaben in den Mathematikunterricht einzubauen. Zudem bietet Technologie eine größere Diversität an mathematischen Modellen, die im Unterricht ohne Technologieeinsatz nicht denkbar gewesen wären. Die Modellnutzung wird durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel also erleichtert, jedoch müssen die Lernenden ein erheblich größeres Wissen über die Eigenschaften der wichtigsten Funktionen mitbringen, weil die Modellauswahl viel komplexer ist.

3.2. Nachteile

Neben den zahlreichen Vorteilen bringt der Technologieeinsatz aber auch einige Nachteile mit sich, die nicht außer Acht gelassen werden sollten.

Um höhere technische Hilfsmittel in den Unterricht erfolgreich integrieren zu können, muss man sich zuallererst Bewusst sein, dass sowohl ausreichend PCs oder Laptops, als auch die Software verfügbar sein müssen (Horzum & Ünlü, 2017, S. 77). Bei der Besorgung der Software scheitert es nicht, da GeoGebra für nicht-kommerzielle Zwecke frei nutzbar ist und sich jede und jeder dieses Programm herunterladen kann (GeoGebra, 2020a). Das Problem liegt bei den (nicht-)vorhandenen Computern. Nicht jede Schülerin bzw. jeder Schüler besitzt einen Laptop, den man jeden Tag in die Schule mitnehmen kann und auch nicht jede Schule verfügt über genügend PCs bzw. über ausreichend Computerräume, in die man im Mathematikunterricht ausweichen könnte (falls die Schülerinnen und Schüler nicht genügend Laptops zur Verfügung haben). Außerdem ist zu beachten, dass meistens mehrere Klassen zeitgleich Mathematik haben. Wenn GeoGebra ein fixer Bestandteil des Mathematikunterrichts ist und alle Klassen einen Computerraum benötigen, könnten die räumlichen Ressourcen knapp werden. Soll GeoGebra regelmäßig in den Unterricht integriert werden, muss also zuerst sichergestellt werden, dass genügend Laptops bzw. PCs und Räumlichkeiten zur Verfügung stehen. Sind diese Voraussetzungen alle gegeben, kann man sich dennoch nicht zu 100% auf die Software verlassen. So kann es passieren, dass beispielsweise der Strom ausfällt, ohne welchen GeoGebra nicht genutzt werden kann. Deswegen müssen die Lehrerinnen und Lehrer jede Unterrichtseinheit genau durchplanen und ein Alternativprogramm parat haben, falls etwaige Komplikationen auftreten. (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8).

Zeit ist ein weiteres Problem, das beim Mathematikunterricht mit Technologieeinsatz auftreten kann. Die Lehrpläne der SEK II sind sehr dicht und Lehrpersonen haben oft Schwierigkeiten, den Stoff einer Schulstufe bzw. eines Semesters abzuarbeiten (Horzum & Ünlü, 2017, S. 78). Der Einsatz von Technologie kann die Schülerinnen und Schüler zwar beim Erlernen mathematischer Themen unterstützen, jedoch muss beachtet werden, dass dies auch mit Zeitaufwand verbunden ist. Zu Beginn müssen die Lernenden den Umgang mit dem Computerprogramm lernen, was eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt. Dies kann aber schließlich durch das schnellere Lösen von komplexeren Aufgaben wieder kompensiert werden (Lindner, 2015, S. 10). Wenn Unterrichtseinheiten mit Technologie nicht genau durchgeplant sind, kann es dazu führen, dass unnötig Zeit verstreicht, was zu

einem schlechteren Lerneffekt der Jugendlichen führen kann (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8). Vor allem leistungsschwache Schülerinnen und Schüler können schwerer Wissen aufbauen, wenn die Zeit begrenzt ist und so haben diese durch knappe zeitliche Ressourcen nicht die Möglichkeit, ihre eigenen mathematischen Kenntnisse zu gewinnen und entdeckend zu lernen (Zulnaidi & Zamri, 2016, S. 2174).

Außerdem sind viele Lehrpersonen unsicher beim Einsatz höherer technischer Hilfsmittel. Vor allem ältere Lehrerinnen und Lehrer, die noch nicht mit der Technologie aufgewachsen sind, haben oft Bedenken, Mathematik mithilfe des Computers zu unterrichten. Lehrerinnen und Lehrer müssen als Expertinnen und Experten vor der Klasse auftreten, was nur gelingt, wenn diese ein Grundvertrauen in die Technologie entwickelt haben (Neumann, 2018, S. 12). Deswegen erfordert der Einsatz elektronischer Hilfsmittel eine entsprechende Ausbildung der Lehrkräfte, um ihnen etwaige Ängste vor der Technologie zu nehmen und diese erfolgreich in den Unterricht zu integrieren (Hohenwarter & Jones, 2007, S. 130).

Des Weiteren müssen die Lehrpersonen immer im Hinterkopf behalten, dass sich der Unterricht durch den Einsatz von Technologie verändert: Die Lehrerinnen und Lehrer nehmen im Unterricht nicht wie gewohnt eine aktive, sondern eine passive, begleitende Rolle ein, da die Lernenden vermehrt selbstständig Inhalte entdecken und ihr eigenes Wissen aufbauen (Gómez-Chacón & Joglar Prieto, 2010, S. 486). Durch diesen *neuen* Mathematikunterricht wird nicht nur die gelehrte Mathematik, sondern auch die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler beeinflusst (Majerek, 2014, S. 52). Durch falschen Technologieeinsatz kann es passieren, dass sich die Lernenden zu sehr auf die Technologie verlassen und ihre eigentlichen mathematischen Fähigkeiten außen vor lassen. Dies kann zur Folge haben, dass wichtiges mathematisches Basiswissen und Rechenfertigkeiten verloren gehen (näheres dazu im Kapitel 4). Algebraische Fähigkeiten und in weiterer Folge auch das Beurteilen und Einordnen von Lösungen, das diese algebraischen Fähigkeiten voraussetzt, werden geschwächt (Neumann, 2018, S. 18f.). Wenn demzufolge die Lehrerinnen und Lehrer den Technologieeinsatz nicht richtig abwägen, stört das eher einen gelungenen Mathematikunterricht. Deswegen müssen sich die Lehrenden darüber im Klaren sein, wann und wie bzw. wie oft technische Hilfsmittel im Mathematikunterricht eingesetzt werden sollen (Vasquez, 2015, S. 7f.).

Ein weiteres Problem, welches in der neuen digitalen Welt junger Menschen auftritt, ist der ständige Kontakt zu sozialen Netzwerken, in denen zahlreiche Falschmeldungen

kursieren. Oft ist es schwierig, diese *Fakenews* von der Wahrheit zu unterscheiden. Vor allem Jugendliche, die mit dem Internet aufwachsen, neigen dazu, alles zu glauben, was im Netz steht, ohne dessen Wahrheitswert zu hinterfragen. So kann es auch in der Schule passieren, dass die Schülerinnen und Schüler gegebene Inhalte akzeptieren, ohne diese zu hinterfragen. Wenn den Lernenden beispielsweise Funktionsverläufe mit GeoGebra demonstriert werden, sehen diese hin, aber denken oft nicht mit. Die Heranwachsenden entwickeln dann zwar mathematische Konzepte, aber ohne adäquate Vorstellungen, was in weiterer Folge zum mathematischen Unverständnis führen kann (Majerek, 2014, S. 51f.).

Außerdem müssen die Lehrpersonen aufpassen, dass die Jugendlichen nicht durch manipulierte oder verwirrende Darstellungen bei z.B. falschem Maßstab in ihrer Denkweise beeinflusst werden. Vor allem im Inhaltsbereich Analysis, der sich mit dem Umgang mit Funktionen beschäftigt, kann dies dazu führen, dass die Lernenden Fehlvorstellungen entwickeln. Deswegen ist es wichtig, dass die Jugendlichen nicht immer alles glauben, was sie auf den Bildschirmen sehen, sondern immer alles kritisch hinterfragen und sich überlegen, ob das wirklich der Wahrheit entsprechen kann (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8). Ein Ziel des Mathematikunterrichts müsste demnach die Entwicklung mathematischer Medienkompetenz sein: Schülerinnen und Schüler sollen nicht nur den Umgang mit Technologie per se beherrschen, sondern auch eine kritische Sichtweise auf diese entwickeln und Ergebnisse niemals unreflektiert übernehmen (Neumann, 2018, S. 13f.). Das bedeutet, dass die Heranwachsenden darin geschult werden sollen, ihre mathematischen Ergebnisse auf Glaubwürdigkeit und im gegebenen Sachkontext zu überprüfen.

4. Inhaltsbereiche der Analysis: Sinnvoller Einsatz von GeoGebra

Seitdem der Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln bei der sRDP verpflichtend ist, ist der Technologieeinsatz im Mathematikunterricht nicht mehr wegzudenken. Deswegen ist die Verwendung von höherer Technologie im Lehrplan in allen Kompetenzbereichen vorgeschrieben, wobei das sachgerechte und sinnvolle Nutzen dieser Hilfsmittel durch geplantes Vorgehen sicherzustellen ist (Rechtsinformationssystem des Bundes, 2020).

Um die Vorteile bestens auszuschöpfen und die Nachteile allenfalls zu kompensieren, muss die Mathematiksoftware im Unterricht richtig eingesetzt werden. In diesem Kapitel soll der fachdidaktisch sinnvolle Einsatz von GeoGebra im Bereich Analysis in der SEK II ausgearbeitet werden. Basierend auf den Lehrplänen und den darin vorgeschriebenen zu erreichenden Lernzielen, sollen reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz aufgezeigt werden, um die Schülerinnen und Schüler bestmöglich beim Lernen zu unterstützen und tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen. Hierbei soll vor allem darauf eingegangen werden, welcher mathematische Kernbereich und welche Rechenfähigkeiten im Unterricht unverzichtbar sind, welche Grundvorstellungen die Lernenden aufbauen sollen und welches Wissen auch ohne technische Hilfsmittel verfügbar sein sollte.

Der Inhaltsbereich Analysis ist ein komplexes Thema der Mathematik, da dieser der Ausgangspunkt eines höheren mathematischen Denkens ist. Das Hauptkonzept der Analysis sind Funktionen, welche ein besonders schwieriges Thema in der Schule sind, da diese eine Verbindung aus den mathematischen Themen Algebra und Geometrie darstellen (Zulnaidi & Zamri, 2016, S. 2157f.). Dadurch bringt das Unterrichten des Inhaltsbereiches Analysis einige Schwierigkeiten mit sich, die durch den richtigen Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln minimiert werden können.

Im Allgemeinen muss man bei dem fachdidaktisch sinnvollen Einsatz von Technologie beachten, dass sich der Schwerpunkt im Mathematikunterricht verschiebt und grundlegende mathematische Tätigkeiten, wie z.B. das Rechnen, auf den Computer ausgelagert werden. Deswegen muss man sich als Lehrperson die Frage stellen, welche mathematischen Fähigkeiten die Schülerinnen und Schüler dennoch besitzen müssen und welchen Stellenwert das Beherrschen von Algorithmen im Mathematikunterricht noch hat (Neumann, 2018, S. 6). Damit diese grundlegenden Tätigkeiten der Lernenden nicht

verloren gehen, müssen diese ständig geübt und wiederholt werden (Lindner, 2015, S. 16). Deshalb ist es oft sinnvoll, den Computer im Unterricht nicht zu verwenden und auf altbewährte Methoden zurückzugreifen (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1).

In erster Linie ist das Ziel des Analysisunterrichts, die Entwicklung eines funktionalen Denkens der Schülerinnen und Schüler. Vollrath (1989) versteht unter funktionalem Denken: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist“ (Vollrath, 1989, S. 5).

Um ein funktionales Denken erreichen zu können, müssen die Lernenden eine Grundvorstellung zu Funktionen entwickeln und diese verinnerlichen. Zu diesen Grundvorstellungen zählen drei Aspekte (Herget, 2013, S. 49):

1. Zuordnungsaspekt: welche Größe einer anderen eindeutig zugeordnet wird
2. Ko-Variationsaspekt: wie sich eine Größe mit der Anderen verändert
3. Funktion als Ganzes: betrachten eines Zusammenhangs als Ganzes

Das Hauptziel des Analysisunterrichts ist also, dass sich bei den Lernenden ein funktionales Denken entwickelt und entfalten kann (Vollrath, 1989, S. 38), diese eine Grundvorstellung zu Funktionen aufbauen und den Umgang mit ihnen erlernen. Der richtige Einsatz von GeoGebra kann beim Erwerb des funktionalen Denkens und dem Aufbau von Grundvorstellungen unterstützend wirken.

In den folgenden Unterkapiteln werden fachdidaktisch reflektierte Zugänge zu ausgewählten Inhaltsbereichen der Analysis, basierend auf den Lehrplänen der SEK II an der AHS, erarbeitet, um den Umgang mit Funktionen zu lernen und in weiterer Folge ein funktionales Denken zu entwickeln.

4.1. Darstellen von Funktionen

4.1.1. Zu erreichende Kompetenzen

Funktionen werden in der SEK II das erste Mal in der 5. Klasse behandelt. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler erstmals Abhängigkeiten mittels Termen, Tabellen und Graphen beschreiben und über den Modellcharakter von Funktionen reflektieren bzw. Funktionen als mathematische Modelle auffassen können.

Wenn sich dieses grundlegende funktionale Denken bei den Lernenden entwickelt hat, beschäftigen sie sich erstmals mit linearen, quadratischen und einigen nichtlinearen Funktionen sowie deren charakteristischen Eigenschaften. Ziel ist die Beschreibung der genannten Funktionen und das Kennen von typischen Funktionsverläufen (RIS, 2020, 5. Klasse).

In der 6. Klasse lernen die Heranwachsenden weitere Funktionen kennen: Potenz-, Polynom-, Exponential-, Logarithmus- und Winkelfunktionen. Die Schülerinnen und Schüler sollen typische Formen der Graphen skizzieren und charakteristische Eigenschaften angeben, sowie diese im Kontext deuten können (RIS, 2020, 6. Klasse).

4.1.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz

Die graphische Darstellung von Funktionen spielt vor allem in der 5. und 6. Klasse eine zentrale Rolle im Mathematikunterricht. Die Heranwachsenden lernen zahlreiche Funktionstypen kennen und müssen über deren Eigenschaften Bescheid wissen, sowie eine Vorstellung zu den einzelnen Funktionsverläufen entwickeln.

Um Funktionen skizzieren zu können, müssen die Lernenden den Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung und dem Funktionsgraphen kennen, was den Schülerinnen und Schülern oft Schwierigkeiten bereitet. An dieser Stelle kann GeoGebra unterstützend im Unterricht wirken, denn in der Mathematiksoftware werden Geometrie und Algebra vereint, sodass die Heranwachsenden den algebraischen und geometrischen Zusammenhang von Funktionen entdecken können. Dadurch, dass bei GeoGebra alles dynamisch ist, können die Jugendlichen die Funktionsgleichung verändern und sehen gleichzeitig, was diese Veränderung am Funktionsgraphen bewirkt und vice versa. Diese verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten bieten eine neue Sicht auf Funktionen (Kaenders, 2011, S. 147) und durch das selbstständige Entdecken wird das Erwerben des funktionalen Denkens unterstützt (Lindenbauer, 2015, S. 71). Außerdem bietet GeoGebra eine gute Möglichkeit für die Visualisierung der Definitionslücken einer Funktion. Dadurch kann den Schülerinnen und Schülern leichter demonstriert werden, was es bedeutet, dass eine Funktion ‚ins Unendliche‘ geht (Velichová, 2011, S. 4).

Eine weitere Schwierigkeit, die das Darstellen von Funktionen mit sich bringt, ist der Zusammenhang zwischen den Parametern in der Funktionsgleichung und dem Funktionsverlauf. Die Demonstration der dynamischen Natur der Algebra an der Tafel ist eine der herausforderndsten und schwierigsten Aufgaben der Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer (Wassie & Zergaw, 2019, S. 8). Für solche Demonstrationen ist es

sinnvoll, GeoGebra im Unterricht zu verwenden. Das Computerprogramm schafft nicht nur eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra, sondern diese Darstellungen sind auch noch dynamisch miteinander verknüpft (Hohenwarter & Jones, 2007, S. 127). So können die Schülerinnen und Schüler eigenständig entdecken, wie sich die Veränderung der Parameter in der Gleichung auf den Funktionsgraphen auswirken. Die Benutzung von GeoGebra als Funktionenplotter bietet den Lernenden die Möglichkeit, wesentliche Eigenschaften von Funktionsgraphen selbstständig zu erkunden und ihnen die Verbindung zwischen Geometrie und Algebra deutlich zu machen. So wird das entdeckende Lernen gefördert und die Zusammenhänge werden durch den Technologieeinsatz nachhaltig in den Köpfen der Heranwachsenden verankert (Schmidt, 2011, S. 41-43), denn langfristiges Lernen kann nicht ohne den Erwerb von Einsichten erfolgreich sein (Pöchtrager, 2015, S. 157).

Das spielerische Entdecken der graphischen Darstellungen von Funktionen und die Auswirkung der Parameter auf den Funktionsgraphen spielen in der 5. und 6. Klasse bei allen Funktionstypen, die die Jugendlichen kennenlernen, eine große Rolle. Auch die Möglichkeit, durch die einfache Eingabe der Funktionsgleichung in GeoGebra ein schnelles Bild vom Funktionsgraphen zu bekommen, kann im Mathematikunterricht hilfreich sein und Zeit sparen, denn durch die rasche und direkte Verfügbarkeit von Wertetabellen und Funktionsgraphen entfällt deren händisches Erstellen (Neumann, 2018, S. 12f.). Außerdem erleichtert die Möglichkeit der Visualisierung von Funktionsgraphen das weitere Hantieren mit der Funktion, da die Schülerinnen und Schüler schon im Vorhinein eine Vorstellung des Funktionsverlaufes haben. Jedoch müssen die Lehrpersonen immer darauf achten, dass die Lernenden trotzdem eine Grundvorstellung zum Verlauf unterschiedlicher Funktionstypen haben. Die Heranwachsenden sollten auch ohne Technologieeinsatz ungefähr die Graphen der im Mathematikunterricht vorkommenden Funktionen skizzieren und über die Auswirkung der Parameter auf die Funktionsverläufe Bescheid wissen, denn im Lehrplan ist klar festgelegt, dass die Schülerinnen und Schüler typische Formen von Graphen der behandelten Funktionen skizzieren können müssen – auch ohne Technologieeinsatz (RIS, 2020).

Ein weiterer in der 5. und 6. Klasse im Lehrplan verankerter Punkt ist, Funktionen als mathematische Modelle auffassen zu können. Um mithilfe von Funktionen mathematische Modelle zu erstellen, müssen die Heranwachsenden die grundlegenden und charakteristischen Eigenschaften von Funktionen verinnerlicht haben, um die

Funktion auszuwählen, die am besten für die anwendungsorientierte Fragestellung geeignet ist. Um die verschiedenen Funktionsverläufe kennenzulernen, eignet sich GeoGebra sehr gut, da durch die Visualisierung ein sofortiges Bild der Funktion generiert wird. Damit die Lernenden aber erfolgreich Modellbildern können, müssen die wesentlichen Eigenschaften der unterschiedlichen Funktionen verinnerlicht sein, denn die Modellentscheidung erfordert ein nachhaltiges Wissen (Heugl, 2014, S. 9).

4.2. Untersuchen von Funktionen

4.2.1. Zu erreichende Kompetenzen

Das zentrale Augenmerk der Analysis liegt beim Untersuchen von Funktionsverläufen und spielt in allen Schulstufen der SEK II eine große Rolle. Hier geht es in erster Linie um die Steigung der Graphen, Extrema und Monotonie- bzw. Krümmungsbereiche (Seebach, 2011, S. 86).

In der 5. Klasse lernen die Schülerinnen und Schüler erstmals die Funktion als eindeutige Zuordnung kennen und werden mit linearen, quadratischen und einigen nichtlinearen Funktionen vertraut gemacht. Das Ziel ist, dass die Lernenden die genannten Funktionen in Hinblick auf Nullstellen und Monotonie untersuchen können (RIS, 2020, 5. Klasse).

Weitere Funktionen lernen die Heranwachsenden in der 6. Klasse kennen. In dieser Schulstufe werden Potenz-, Polynom-, Exponential-, Logarithmus-, und Winkelfunktionen behandelt. Die Jugendlichen sollen dazu in der Lage sein, diese Funktionen in Hinblick auf Monotonie, lokale und globale Extremstellen, Symmetrie und Periodizität zu untersuchen (RIS, 2020, 6. Klasse).

Nach der Einführung der Differentialrechnung in der 7. Klasse sollen die Lernenden Funktionen mithilfe der Ableitungen untersuchen können. Hier geht es um die Angabe von Monotonie- und Krümmungsbereichen und das Berechnen von Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen (RIS, 2020, 7. Klasse).

Das Untersuchen von Funktionen findet schließlich in der 8. Klasse mit der Einführung der Integralrechnung seinen Höhepunkt (RIS, 2020, 8. Klasse).

4.2.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz

Das Untersuchen von Funktionen wird durch den Einsatz von GeoGebra sehr erleichtert, da das Computerprogramm zahlreiche nützliche Werkzeuge besitzt. So liefert beispielsweise ein einziger Mausklick die Nullstellen bzw. Extremstellen einer Funktion (GeoGebra, 2020b).

Will man beispielsweise die Nullstellen einer Funktion finden, ist das in GeoGebra sehr simpel: Entweder klickt man auf das Werkzeug *Nullstelle* (GeoGebra, 2020c) oder man tippt *Nullstelle* in die Eingabeleiste ein und schon werden die gesuchten Stellen der Funktion ausgegeben (GeoGebra, 2020d). Die Jugendlichen benötigen dafür keine besonderen Computer- bzw. Mathematikkenntnisse. Die herkömmliche Ermittlung von Nullstellen, also ohne den Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln, erfordert weit mehr mathematisches Wissen und Fähigkeiten. Um Nullstellen überhaupt berechnen zu können, müssen sich die Schülerinnen und Schüler darüber im Klaren sein, was das Wort *Nullstelle* überhaupt bedeutet, nämlich, dass der Funktionswert an dieser Stelle 0 ist bzw. die Funktion die 1. Achse schneidet. In weiterer Folge muss man nun die Funktionsgleichung gleich Null setzen und diese Gleichung nach der abhängigen Variable auflösen, um die entsprechende/n Stelle/n zu erhalten. Das händische Ermitteln von Nullstellen erfordert demzufolge ein mathematisches Wissen und Rechenfertigkeiten, wohingegen beim Verwenden von GeoGebra keine großen Mathematikkenntnisse benötigt werden. Dieses Beispiel zeigt, dass durch den Computereinsatz das Grundverständnis der Nullstellen verloren gehen kann, da die Heranwachsenden diese ermitteln können, ohne deren Bedeutung zu verstehen.

In der 6. Klasse schreibt der Lehrplan neben der Berechnung von Nullstellen auch das Untersuchen von Funktionen hinsichtlich Extremstellen und Monotoniebereichen vor (RIS, 2020, 6. Klasse). Da in dieser Schulstufe die Differentialrechnung noch nicht bekannt ist, können die Lernenden im Allgemeinen Extremstellen nicht händisch eruieren, wodurch hier der Einsatz von GeoGebra hilfreich sein kann. Mit dem Befehl *Extremstelle* können sehr einfach und ohne mathematische Kenntnisse die Extremstellen einer Funktion ermittelt werden (GeoGebra, 2020e). Durch die Visualisierung des Funktionsgraphen sollte es außerdem keine großen Schwierigkeiten bereiten, die Monotoniebereiche anzugeben.

Im Lehrplan der 6. Klasse ist außerdem vorgeschrieben, dass die Schülerinnen und Schüler den Unterschied zwischen globalen und lokalen Extremstellen kennenlernen

sollen (RIS, 2020, 6. Klasse). Mithilfe des Befehls *Extremstelle* werden in GeoGebra zwar alle lokalen Extrema einer Funktion ausgegeben (GeoGebra, 2020e), jedoch ist die Mathematiksoftware nicht dazu im Stande, die globalen Extremstellen in einem Intervall anzugeben, wodurch sich der Einsatz des Computerprogramms in diesem Teilgebiet nicht als fachdidaktisch sinnvoll erweist. Die Lernenden dürfen sich bei solchen Aufgabenstellungen nicht auf die Technologie verlassen, sondern müssen den Unterschied zwischen lokalen und globalen Extrema verinnerlicht haben und wissen, wie man diese vom Funktionsgraphen ablesen kann.

Mit der Einführung der Differentialrechnung in der 7. Klasse lernen die Jugendlichen das Untersuchen von Funktionen in Hinblick auf Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen mittels der Ableitungen. Im Lehrplan ist vorgeschrieben, dass die Lernenden die oben genannten Eigenschaften beschreiben können sollen (RIS, 2020, 7. Klasse). Die Schülerinnen und Schüler müssen folglich über die Differentialeigenschaften der eben genannten Stellen Bescheid wissen und diese zur Berechnung jener anwenden können.

Um beispielsweise eine Extremstelle händisch eruieren zu können, müssen die Heranwachsenden eine Grundvorstellung entwickeln, die auf der notwendigen und hinreichenden Bedingung einer solchen Stelle beruht. Die hinreichende Bedingung besagt, dass eine Funktion bei einem Extremum ihr Monotonieverhalten ändert. Das alleine genügt aber nicht und man benötigt noch die notwendige Bedingung einer Extremstelle: Die 1. Ableitung ändert an dieser Stelle ihr Vorzeichen und verschwindet somit, was bedeutet, dass die Funktion an dieser Stelle eine waagrechte Tangente hat. Außerdem muss noch gelten, dass die 2. Ableitung der Funktion an dieser Stelle ungleich Null ist, um sich wirklich sicher sein zu können, dass es sich um eine Extremstelle handelt (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 138ff.). Um also zur Einsicht zu kommen, dass man beim Ermitteln der Extremstellen die 1. Ableitung gleich Null setzen muss, brauchen die Heranwachsenden einiges an mathematischen Wissen und eine adäquate Vorstellung der Differentialrechnung. Gleiches gilt für das händische Ermitteln der Wendepunkte – auch hier müssen die Lernenden über die hinreichenden und notwendigen Bedingungen Bescheid wissen. Will man händisch eine Kurvendiskussion durchführen, werden die wesentlichen Punkte unter Zuhilfenahme der Ableitungen Schritt für Schritt bestimmt. Durch den Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln kann dieser Vorgang durch Klicken auf den richtigen Befehl in weniger als einer Minute vollzogen werden (Neumann, 2018, S. 10). Dies spart im Unterricht zwar Zeit, jedoch muss man als Lehrperson bedenken,

dass die Schülerinnen und Schüler hierbei über keine Kenntnisse der Differentialeigenschaften dieser Punkte verfügen müssen. Somit geht wichtiges mathematisches Wissen verloren und alle Fähigkeiten, die das herkömmliche händische Berechnen benötigt, kommen abhanden. Würde man den Mathematikunterricht vollkommen auf den Computer auslagern, hätte dies zur Folge, dass sich die Kurvendiskussion grundlegend verändert bzw. diese sogar überflüssig wird (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 42f.). Trotzdem bleibt die Kurvendiskussion auch im modernen Mathematikunterricht vor allem wegen theoretischer Gründe bedeutsam: Sie ist das Mittel, um Eigenschaften von Funktionen mathematisch zu beweisen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 192) und nur so können die Lernenden eine Grundvorstellung zu den Ableitungen entwickeln und den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken. Dieses Wissen ist essenziell, um mit Funktionen umgehen zu können und in weiterer Folge ein funktionales Denken zu entwickeln.

4.3. Aufsuchen von Funktionen

4.3.1. Zu erreichende Kompetenzen

Das Aufsuchen von Funktionen ist nicht explizit im Lehrplan verankert, trotzdem ist dies eine Kompetenz, die die Schülerinnen und Schüler erlernen müssen, um mit mathematischen Modellen arbeiten zu können.

In vielen Anwendungsbereichen der Mathematik spielt das Erstellen von mathematischen Modellen mithilfe geeigneter Funktionen eine große Rolle und auch im Lehrplan ist das Modellbilden – vor allem in der 5. und 6. Klasse – verankert. Deswegen ist es unverzichtbar, dass die Heranwachsenden auch das Aufsuchen von passenden Funktionen beherrschen (RIS, 2020, 5. und 6. Klasse).

4.3.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz

Beim Aufsuchen von Funktionen handelt es sich um die Umkehrung der Kurvendiskussion. Hierbei geht es darum, bei gegebenen Daten über die Lage von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten eine dazu passende Funktionsgleichung zu bestimmen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 198).

In der 5. und 6. Klasse sind die Lernenden noch nicht mit der Differentialrechnung vertraut, was die umgekehrte Kurvendiskussion darauf beschränkt, eine passende Funktion durch gegebene Punkte zu finden. Würde man dies händisch berechnen, müssten die Schülerinnen und Schüler entsprechend viele Gleichungen mithilfe der gegebenen Punkte aufstellen und anschließend das erhaltende Gleichungssystem lösen. Dies ist zeitaufwändig und das Einsetzen der Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung erfordert ein nicht allzu großes Wissen. An dieser Stelle bietet sich der Einsatz von GeoGebra an, denn bei der Mathematiksoftware gibt es den Befehl *Regression*, der durch gegebene Punkte eine passende Funktion findet. Die Jugendlichen haben die Möglichkeit, aus verschiedenen Funktionstypen die passende Funktion bzw. den gesuchten Funktionstyp auszuwählen (GeoGebra, 2020f) und erhalten so ohne großen Aufwand die gesuchte Funktionsgleichung.

Die umgekehrte Kurvendiskussion findet in der 5. und 6. Klasse vor allem beim Modellbilden ihre Anwendung. Durch den Technologieeinsatz wird zwar die Rechentätigkeit vom Computer übernommen, die Schülerinnen und Schüler müssen aber trotzdem selbstständig die passende Modellauswahl treffen, was ein nachhaltiges Wissen über die in der jeweiligen Schulstufe bekannten Funktionstypen voraussetzt. Dadurch, dass keine Zeit beim Aufstellen und Lösen der Gleichungssysteme verloren geht und die Technologie komplexe Rechnungen übernimmt, kann der Fokus im Unterricht auf der Interpretation im Sachzusammenhang liegen, wodurch eine praxisnähere Anwendung im Mathematikunterricht möglich ist (Heugl, 2014, S. 9).

Sobald die Schülerinnen und Schüler in der 7. Klasse die Differentialrechnung kennengelernt haben, ist es auch möglich, die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion durch ihre Differentialbedingungen zu finden. Auch hier bietet sich GeoGebra zum Lösen der Problemstellung mithilfe des CAS-Fensters an. Die Lernenden können in der ersten Zeile die allgemeine Funktionsgleichung definieren und in den weiteren Zeilen die gegebenen Bedingungen eintippen, welche das Computerprogramm in die entsprechenden Gleichungen umwandelt. Das Lösen des Gleichungssystems erfolgt durch den Befehl *Löse* und die Heranwachsenden erhalten so die Parameter der Funktionsgleichung (GeoGebra, 2020g). Der Technologieeinsatz ist hier nur eine Hilfestellung, der den Lernenden die Rechenarbeit abnimmt. Um GeoGebra überhaupt benutzen zu können, müssen die Lernenden die angegebenen Bedingungen erst mathematisch übersetzen, um diese ins CAS-Fenster eintippen zu können. Wissen die Jugendlichen nicht, was eine Nullstelle, Extremstelle oder Wendestelle bedeuten bzw.

wenn diese nicht über deren Differentialeigenschaften Bescheid wissen, hilft ihnen der Einsatz von Technologie nicht weiter. Deswegen ist es notwendig, dass das Wissen über die Extrem- und Wendestellen und deren Zusammenhang zu den Ableitungen schon vorher gefestigt worden ist und die Jugendlichen dieses bereits erlernte Wissen abrufen und wiederverwenden können.

Das Verwenden von Technologie beim Aufsuchen von Polynomfunktionen ist eine gute Möglichkeit, um Zeit im Unterricht zu sparen, ohne dass mathematisches Wissen in Bezug auf den Inhaltsbereich Analysis verloren geht. Durch die gewonnene Zeit kann der Fokus im Mathematikunterricht auf andere Dinge, wie z.B. der richtigen Modellauswahl oder Interpretation und Argumentation der Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang, gelegt werden (Lindner, 2018, S. 16).

4.4. Differentialrechnung

4.4.1. Zu erreichende Kompetenzen

In der 7. Klasse wird erstmals die Differentialrechnung eingeführt. Um die Schülerinnen und Schüler schrittweise darauf hinzuführen, wird zuerst der Differenzenquotient als Sekantensteigung betrachtet. Durch sukzessives Verkleinern des Intervalls, in dem der Differenzenquotient betrachtet wird, sollen die Lernenden langsam zum Grenzfall – indem die Sekante in eine Tangente übergeht – hingeführt werden. So wird den Heranwachsenden der Weg von der mittleren zur momentanen Änderung vermittelt und diese sollten letztendlich dazu in der Lage sein, den Differenzen- und Differentialquotienten zu definieren und in außermathematischen Bereichen deuten können.

Des Weiteren müssen die Lernenden den Begriff der Ableitungsfunktion und dessen Bedeutung kennen. Außerdem sollten höhere Ableitungen und verschiedene Ableitungsregeln für Potenz- und Polynomfunktionen bekannt sein und die Jugendlichen müssen dazu in der Lage sein, sich an diesen zu bedienen, um die Ableitungen einer Funktion zu berechnen. Bei der Erweiterung und Exaktifizierung der Differentialrechnung im 2. Semester der 7. Klasse sollen die Heranwachsenden auch die Ableitungsregeln für die Exponential- und Logarithmusfunktion, Sinus- und Cosinusfunktion sowie weitere Ableitungsregeln, wie z.B. die Kettenregel, kennen und anwenden können. In weiterer Folge ist das Ziel der Differentialrechnung,

Polynomfunktionen und deren Eigenschaften wie Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen mithilfe der Ableitungen beschreiben zu können (RIS, 2020, 7. Klasse).

4.4.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz

Die Definition des Ableitungsbegriffs beruht auf zwei Grundvorstellungen: Einerseits kann die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten (lokale Änderungsrate) und andererseits als lokale lineare Approximation gesehen werden (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 257).

In der 7. Klasse sollte den Schülerinnen und Schülern der Differenzenquotient bereits als Sekantensteigung, der die mittlere Änderung in einem Intervall angibt, bekannt sein. Dieses Intervall kann systematisch verkleinert werden und so kann mithilfe des Grenzwertes ein lokales Änderungsverhalten – die Änderung in einem Punkt – beschrieben werden. Graphisch bedeutet das, dass die Sekante in eine Tangente übergeht. Diese Tangente gibt die Steigung des Funktionsgraphen in einem Punkt an (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 148ff.). Den Lernenden diesen Übergang an der Tafel zu demonstrieren, kann für die Lehrpersonen zu einer Herausforderung werden, da das Einzeichnen der Sekanten in den immer kleiner werdenden Intervallen rasch unübersichtlich wird. Zeichnet man weniger Intervalle mit deren Sekanten ein, wird die Skizze zwar übersichtlicher, jedoch besteht dann die Gefahr, dass die Jugendlichen diesen Vorgang nicht nachvollziehen und so keine Grundvorstellung zur Differentialrechnung aufbauen können. An dieser Stelle kann der Einsatz von GeoGebra hilfreich sein. In der Software ist es möglich, das Intervall dynamisch mittels Schieberegler sukzessive zu verkleinern und die Schülerinnen und Schüler haben so die Chance, spielerisch zu entdecken, welche Auswirkungen eine Veränderung der Intervallbreite auf die Sekantensteigung hat und wie die Sekante in eine Tangente und so auch der Differenzenquotient in den Differentialquotienten übergeht. Dies spart nicht nur Zeit, da die GeoGebra-Datei bereits zuhause vorbereitet werden kann, sondern durch das selbstständige Erkunden können die Lernenden das neue Thema selbstständig verstehen und die Grundvorstellung der Differentialrechnung als lokale Änderungsrate aufbauen.

Des Weiteren können die Heranwachsenden GeoGebra als ‚Funktionenlupe‘ verwenden. Zoomt man an die Funktion heran, wird man diese schnell nicht mehr von einer Geraden unterscheiden können. Die Funktion wird also in einem Punkt durch ihre Tangente approximiert, was die Lernenden zur zweiten Grundvorstellung der Differentialrechnung,

der lokalen Linearität, führt (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 68f.). Diese besagt, dass die Steigung einer Funktion äquivalent zum Steigungsfaktor einer affin-linearen Funktion – der Tangente in diesem Punkt – ist (Blum & Törner, 1983, S. 96f.). Durch die Visualisierung und das selbstständige Entdecken wird es den Jugendlichen erleichtert, auch diese zweite Grundvorstellung besser zu verstehen und zu verinnerlichen.

Die Differentialrechnung wird im Mathematikunterricht aber nicht nur graphisch, sondern auch rechnerisch behandelt. In weiterer Folge werden die Schülerinnen und Schüler mit den Ableitungsregeln und den Ableitungen von Polynomfunktionen bekannt gemacht. Im Lehrplan steht explizit, dass die Heranwachsenden die Ableitungsregeln für Polynomfunktionen kennen und anwenden können müssen (RIS, 2020, 7. Klasse). Durch den Technologieeinsatz kann es aber passieren, dass diese Kompetenz nicht mehr erreicht werden kann, wenn sich die Lernenden zu sehr auf die elektronischen Hilfsmittel verlassen. Denn durch den Einsatz von GeoGebra müssen die Jugendlichen nicht mit den Ableitungsregeln vertraut sein, sondern ein einfaches Eintippen von *Ableitung* in die Eingabezeile genügt, um die Ableitung einer Funktion zu erhalten (GeoGebra, 2020h). So bekommen die Schülerinnen und Schüler zwar ein schnelles Ergebnis ohne großen Aufwand, jedoch gehen wichtige mathematische Fertigkeiten verloren, da die Heranwachsenden das Ableiten von Polynomfunktionen nicht mehr zwingend händisch können müssen. Durch die Auslagerung der Rechentätigkeiten auf den Computer werden algebraische Fähigkeiten, die ständiges Üben und Wiederholen erfordern, geschwächt, wodurch die Lernenden nicht mehr dazu in der Lage sind, Lösungen richtig einzuordnen (Neumann, 2018, S. 18f.). Abgeleitete Ausdrücke, die der Computer weiter vereinfacht hat, sodass die Ableitungsregeln nicht mehr ersichtlich sind, können so für die Jugendlichen verwirrend wirken, da ihnen die algebraischen Fähigkeiten der Termvereinfachung fehlen. Im schlimmsten Fall werden die Ergebnisse der Technologie unreflektiert übernommen (Neumann, 2018, S. 13f.), ohne dass sich die Schülerinnen und Schüler mit den Ableitungsregeln auseinandersetzen.

Auch beim Untersuchen von Polynomfunktionen im Hinblick auf Monotonie- und Krümmungsbereiche, Extremstellen, Wendestellen und Sattelstellen kann der Einsatz von Technologie zwar Unterrichtszeit einsparen, aber wie schon im Kapitel 4.2.2. genauer erläutert, gehen wichtige mathematische Fähigkeiten verloren, die auf das Grundprinzip der Differentialrechnung zurückgehen, wenn die Kurvendiskussion ausschließlich durch den Einsatz des Computers behandelt wird.

Sind die Schülerinnen und Schüler mit den Ableitungsregeln vertraut und dazu in der Lage, Polynomfunktionen mithilfe der Differentialrechnung zu untersuchen, geht es im Mathematikunterricht darum, den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen graphisch zu untersuchen. Das graphische Ableiten und in weiterer Folge die Umkehrung spielen im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle, da hier kalkülhafte Aspekte des Differenzierens und inhaltlich anschauliche Vorstellungen eng miteinander verknüpft werden müssen. Des Weiteren kann das graphische Ableiten helfen, um sich einen Überblick über die Verlaufseigenschaften der zu untersuchenden Funktionen zu machen (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 263). Die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen können durch den Einsatz von GeoGebra demonstriert werden und die Lernenden können diese selbständig untersuchen. Das entdeckende Lernen führt in weiterer Folge zu einem eigenen Wissensaufbau.

4.5. Integralrechnung

4.5.1. Zu erreichende Kompetenzen

Das Integral wird in der 8. Klasse im Mathematikunterricht behandelt. Mittels Unter- und Obersummen werden die Schülerinnen und Schüler zum bestimmten Integral hingeführt und letztendlich sollte dieses näherungsweise als Summe von Produkten aufgefasst und berechnet werden können. Des Weiteren müssen die Lernenden dazu in der Lage sein, Größen durch Integrale (z.B. Flächeninhalte oder zurückgelegte Wege) auszudrücken und den Begriff *Stammfunktion* kennen und diesen anwenden können. Bestimmte Integrale sollten zudem mithilfe von Stammfunktionen unter Verwendung elementarer Integrationsregeln ermittelt werden können. Bei der Anwendung und Exaktifizierung der Integralrechnung geht es darum, dass die Jugendlichen bestimmte Integrale in verschiedenen Kontexten deuten können, unbestimmte Integrale und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen und den Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und Integrieren erläutern können (RIS, 2020, 8. Klasse).

4.5.2. Fachdidaktisch reflektierte Zugänge zum Technologieeinsatz

Für die Integralrechnung gibt es zahlreiche Aspekte und Grundvorstellungen. In der Schule kann man diese jedoch auf zwei wesentliche Grundvorstellungen reduzieren, auf die im Folgenden eingegangen wird: Flächeninhaltsgrundvorstellung und (Re-)Konstruktionsgrundvorstellung (Tietze, Klika & Wolpers, 1997, S. 280).

Der Zugang zur Integralrechnung über das bestimmte Integral hat das Ziel, eine krummlinig umrandete Fläche möglichst genau zu bestimmen. Dieser Herangehensweise liegt die Flächeninhaltsgrundvorstellung zugrunde (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 244). Um die Schülerinnen und Schüler schrittweise an das bestimmte Integral heranzuführen, wird dieses zunächst anhand von Unter- und Obersummen eingeführt. An dieser Stelle ist es sinnvoll, GeoGebra im Mathematikunterricht einzusetzen. Durch die Möglichkeit der dynamischen Darstellung können die Breiten der Rechtecke mittels Schieberegler variiert werden, was eine einsehbare Visualisierung der Unter- und Obersummen ermöglicht. So können die Heranwachsenden spielerisch entdecken, welche Auswirkung die Änderung der Intervallbreite auf die Unter- und Obersummen hat. Wenn man nebenbei auch noch die Werte des bestimmten Integrals und der Unter- und Obersumme ausgibt, können die Lernenden leicht erkennen, dass der Wert des bestimmten Integrals immer zwischen denen der Unter- und Obersumme liegt. Den Jugendlichen wird auch die Möglichkeit geboten, den Grenzfall, dass die Breiten der Rechtecke unendlich klein werden, zu erkunden. Umso größer die Anzahl der Rechtecke ist, desto kleiner wird die Abweichung vom Wert des bestimmten Integrals. So können die Lernenden entdecken, dass das bestimmte Integral beliebig gut durch Rechtecksummen approximiert wird (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 118f.) und die Heranwachsenden sollten dazu in der Lage sein, Unter- und Obersummen als Produktsummen auffassen zu können (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 239).

Um die Flächeninhaltsgrundvorstellung des Integrals zu erlangen, müssen die Jugendlichen außerdem den Unterschied zwischen dem bestimmten Integral und der Fläche, die die Funktion mit der x – Achse einschließt, kennen. Es gibt drei Fälle, die eintreten können (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 245):

1. Der Graph verläuft oberhalb der 1. Achse
2. Der Graph verläuft unterhalb der 1. Achse
3. Der Graph schneidet die 1. Achse

Verläuft der Graph einer Funktion nur oberhalb der 1. Achse (1. Fall), so entspricht das bestimmte Integral der Fläche. Liegt der Funktionsgraph aber unterhalb der 1. Achse (2. Fall), ist der Wert des bestimmten Integrals negativ. Flächen können aber nie negativ sein und so muss man beim Berechnen von Flächen, die unter der 1. Achse liegen, immer den

Betrag des bestimmten Integrals betrachten. Beim 3. Fall schneidet der Funktionsgraph die 1. Achse. Hier unterscheidet sich auch der Betrag des Integralwerts vom Flächeninhalt und in diesem Fall kann der Flächeninhalt nur bestimmt werden, indem die Ermittlung des bestimmten Integrals durch Teilintervalle zwischen den Nullstellen auf die ersten beiden Fälle zurückgeführt wird. Der 3. Fall zeigt den Unterschied zwischen dem Wert des bestimmten Integrals und dem Flächeninhalt deutlich und so hat die Vorstellung des bestimmten Integrals als Flächeninhalt auch ihre Grenzen (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 245). Die Möglichkeiten der Technologie stoßen an dieser Stelle ebenfalls an ihre Grenzen. Es gibt in GeoGebra zwar den Befehl *Integral(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>)*, der das bestimmte Integral in einem Intervall berechnen kann (GeoGebra, 2020i), jedoch wird ohne Rücksichtnahme darauf, ob die Funktion die 1. Achse schneidet oder nicht, ‚durchintegriert‘. Das heißt, dass Flächen oberhalb/unterhalb der 1. Achse ein positives/negatives Vorzeichen haben und so der Wert des bestimmten Integrals unter Umständen nicht dem Flächeninhalt entspricht. Die Schülerinnen und Schüler dürfen sich also beim Ermitteln von Flächeninhalten nicht vollständig auf die technischen Hilfsmittel verlassen, sondern müssen eigenständig die passenden Teilintervalle wählen bzw. den Betrag anwenden, falls der Wert des bestimmten Integrals negativ ist. Das kann den Lernenden aber nur zugetraut werden, wenn diese eine tragfähige Grundvorstellung zum bestimmten Integral entwickelt haben und die unterschiedlichen Fälle, die bei der Berechnung auftreten können, verinnerlicht haben.

In weiterer Folge geht es darum, bestimmte Integrale im Kontext zu deuten. An dieser Stelle kommt die zweite Grundvorstellung – die (Re-)Konstruktionsgrundvorstellung – ins Spiel. Hierbei geht es darum, eine Größe aus gegebenen Änderungen bzw. eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion zu (re-)konstruieren (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 247). An dieser Stelle ist der Einsatz von GeoGebra nicht sehr sinnvoll. Die Mathematiksoftware ist zwar dazu im Stande, jegliche Integrale zu berechnen, jedoch wird das Ergebnis des bestimmten Integrals immer ohne Einheit ausgegeben, wodurch der Technologieeinsatz bei der Interpretation der Ergebnisse im gegebenen Sachzusammenhang keine Hilfestellung ist.

Wie bereits zuvor erwähnt, ist GeoGebra dazu in der Lage, bestimmte Integrale zu ermitteln. Hierfür gibt es den Befehl *Integral*, der sowohl das bestimmte, als auch das unbestimmte Integral einer Funktion eruiert (GeoGebra, 2020i). Dadurch, dass das Computerprogramm den Rechenprozess vollständig übernimmt, müssen die Lernenden

nicht mehr dazu in der Lage sein, Stammfunktionen elementarer Funktionen berechnen zu können bzw. müssen diese nicht mehr über den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion Bescheid wissen, was aber ein wichtiger Aspekt der (Re-)Konstruktionsvorstellung ist (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 247). Wird das Ermitteln von bestimmten Integralen vollständig auf die Technologie ausgelagert, wird das Wissen über die Stammfunktion, sowie das Einsetzen der unteren und oberen Grenze in diese obsolet, da diese Schritte nicht explizit angezeigt werden und GeoGebra sofort das Ergebnis ausgibt. Das ist ein gutes Beispiel, das zeigt, dass es durchaus sinnvoll ist, den Computer im Mathematikunterricht ausgeschaltet zu lassen und auf altbewährte Methoden – die händische Berechnung – zurückzugreifen (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1), bis die Schülerinnen und Schüler eine tragfähige Grundvorstellung zum Integral aufgebaut und die Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion verinnerlicht haben.

Ein weiteres Ziel des Analysisunterrichts ist es, dass die Schülerinnen und Schüler unbestimmte Integrale kennenlernen und mit diesen umgehen können (RIS, 2020, 8. Klasse). Das wird benötigt, um die (Re-) Konstruktionsgrundvorstellung des Integrals zu vollenden (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 247). Beim unbestimmten Integral geht es nämlich um die Umkehrung der Differentialrechnung. Aus einer gegebenen Funktion soll eine Stammfunktion (re-)konstruiert werden, deren Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ergibt. Der zentrale Punkt hierbei ist, dass es unendlich viele Stammfunktionen gibt, die sich jeweils nur um eine Konstante, die die Verschiebung entlang der 2. Achse angibt, unterscheiden (Blum & Törner, 1983, S. 163). Lagert man den Mathematikunterricht komplett auf den Computer aus, bauen die Heranwachsenden möglicherweise eine falsche Vorstellung des unbestimmten Integrals auf. GeoGebra ist zwar dazu im Stande, mit dem Befehl *Integral* eine Stammfunktion zu berechnen, aber eben nur eine einzige (GeoGebra, 2020i). Das Addieren einer Konstante wird vernachlässigt und so können die Lernenden nicht entdecken, dass es unendlich viele Stammfunktionen gibt, was aber eine wichtige Erkenntnis ist, um den Zusammenhang der Differential- und Integralrechnung verstehen zu können. Die Verschiebung entlang der 2. Achse hat nämlich keine Auswirkungen auf die Ableitung, da die Konstante beim Differenzieren ohnehin wegfällt. Nur wenn die Jugendlichen diese Verbindung verstehen, werden sie den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral und somit den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung einsehen.

Abschließend kann festgehalten werden, dass durch den Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht jede Schülerin und jeder Schüler dazu im Stande sein sollte, bestimmte Integrale und Stammfunktionen zu ermitteln, da dies kein mathematisches Wissen voraussetzt und von der Technologie übernommen wird. Trotzdem sollte aber vor allem den leistungstärkeren Jugendlichen die Möglichkeit geboten werden, den tieferen Sinn der Integralrechnung zu verstehen, was nur möglich ist, wenn nicht alle Rechentätigkeiten auf den Computer ausgelagert werden.

5. Conclusio

Zahlreiche Studien belegen, dass der Einsatz von höheren technischen Hilfsmitteln im Mathematikunterricht die Leistungen der Schülerinnen und Schüler verbessert (unter anderem: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014) und vor allem in den Inhaltsbereichen der Analysis wirkt GeoGebra bei fachdidaktisch reflektierter Verwendung unterstützend im Mathematikunterricht. Visualisierungen von Funktionsverläufen und die dynamische Veränderung von Parametern sind Beispiele für die unzähligen Vorteile, die die Verwendung von Technologie mit sich bringt (Majerek, 2014, S. 52). Durch einen zu intensiven Einsatz der Mathematiksoftware kann es aber passieren, dass die Lernenden wichtige mathematische Kenntnisse verlieren und so keine Grundvorstellung zu den Kernbereichen im Analysisunterricht aufbauen können. Werden Rechentätigkeiten vollständig auf den Computer ausgelagert, können algebraische Fähigkeiten der Jugendlichen abhandenkommen, denn diese erfordern ein ständiges Wiederholen und Üben (Lindner, 2015, S. 16). So dürfen neben den zahlreichen Vorteilen des Technologieeinsatzes die potentiellen Nachteile nicht aus den Augen gelassen werden.

Ob aber nun der Einsatz höherer technischer Hilfsmittel im Mathematikunterricht im Inhaltsbereich Analysis sinnvoll ist, lässt sich nicht verallgemeinern und hängt vom jeweiligen Themengebiet ab.

Beim Darstellen von Funktionen kann der GeoGebra-Einsatz im Mathematikunterricht sehr hilfreich sein, da die Software nicht nur Funktionsverläufe visualisieren kann, sondern auch die Möglichkeit bietet, durch die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten eine Verbindung zwischen Geometrie und Algebra herzustellen (Hohenwarter, Hohenwarter, & Lavicza 2008, S. 137f.). Durch die dynamische Veränderbarkeit der Parameter einer Funktion können die Lernenden spielerisch die Auswirkungen auf den Graphen erforschen, was das entdeckende Lernen fördert und in weiterer Folge zu einem selbstständigen Wissensaufbau führt. Trotzdem sollten die Lehrpersonen darauf achten, dass die Heranwachsenden nicht immer auf die Technologie zurückgreifen und auch ohne den Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln über Funktionsverläufe und die charakteristischen Eigenschaften der im Mathematikunterricht behandelten Funktionen Bescheid wissen.

Das Untersuchen von Funktionen wird durch den Technologieeinsatz sehr vereinfacht, da GeoGebra Befehle für die wichtigsten Punkte einer Kurvendiskussion besitzt (GeoGebra,

2020b). Dies kann im Unterricht zwar Zeit sparen, da so die gesuchten Stellen ohne großen Aufwand und ohne mathematischer Kenntnisse berechnet werden können. Jedoch muss man immer im Hinterkopf behalten, dass durch die unreflektierte Nutzung von elektronischen Hilfsmitteln partiell mathematisches Wissen verloren geht, da die Jugendlichen nicht über die (Differential-)Eigenschaften der zentralen Punkte der Kurvendiskussion verfügen müssen. Dies kann zur Folge haben, dass die Heranwachsenden keine Grundvorstellung zu den Ableitungen und den Zusammenhängen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion aufbauen können, was aber wesentlich für die Entwicklung des funktionalen Denkens und demnach ein Ziel des Analysisunterrichts ist.

Bei der umgekehrten Kurvendiskussion hingegen bietet sich der Einsatz von GeoGebra an, da hier lediglich die Rechentätigkeit auf den Computer ausgelagert wird. Um die Mathematiksoftware verwenden zu können, müssen die Schülerinnen und Schüler trotzdem über die Differentialeigenschaften zentraler Punkte einer Funktion Bescheid wissen, um die gegebenen Bedingungen in mathematische Gleichungen übersetzen zu können. So wird lediglich das Aufstellen und anschließende Lösen des Gleichungssystems vom Computerprogramm übernommen. Dies spart Unterrichtszeit, ohne dass mathematische Kenntnisse der Jugendlichen verloren gehen.

Bei der Differentialrechnung bringt der Einsatz elektronischer Hilfsmittel sowohl Pros als auch Contras mit sich. Durch die Möglichkeiten der Visualisierung können die Lernenden leichter die Grundvorstellungen der Differentialrechnung aufbauen und das Konzept dieser verinnerlichen. Auch beim grafischen Differenzieren wirkt GeoGebra unterstützend, da die Verbindung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen verdeutlicht wird. Jedoch wird die Differentialrechnung im Mathematikunterricht nicht nur graphisch, sondern auch algebraisch behandelt. Die Heranwachsenden sollten Kenntnis über die grundlegenden Ableitungsregeln haben und dazu in der Lage sein, diese anzuwenden (RIS, 2020, 7. Klasse). Wird dieser Teil des Unterrichts vollständig auf den Computer ausgelagert, werden die Jugendlichen nicht mehr über die oben genannten Kompetenzen verfügen, da in GeoGebra das Ableiten von einem einzigen Befehl übernommen wird (GeoGebra, 2020h), der kein mathematisches Wissen voraussetzt.

Auch bei der Integralrechnung hat der Technologieeinsatz Vor- und Nachteile. Bei der Einführung des Integrals mittels Unter- und Obersummen ist GeoGebra behilflich, um

die Schülerinnen und Schüler auf das bestimmte Integral hinzuführen. Die Rechteckbreiten können in der DMS dynamisch variiert werden und durch die graphische Darstellung entwickeln die Jugendlichen die Grundvorstellung des Integrals als Fläche. GeoGebra eignet sich also, um das Grundprinzip der Integralrechnung zu demonstrieren. Wird der Integral-Unterricht aber vollständig auf den Einsatz elektronischer Hilfsmittel aufgebaut, stoßen diese sehr schnell an ihre Grenzen. Einerseits kann die Mathematiksoftware nicht zwischen dem bestimmten Integral und der Fläche unterscheiden, was in weiterer Folge zu einer falschen Vorstellung des Integrals als Fläche führt und andererseits müssen die Lernenden die elementaren Integrationsregeln nicht mehr kennen und anwenden können, da dieser Prozess vollständig vom Computerprogramm übernommen wird. Des Weiteren sollen die Jugendlichen eine weitere Grundvorstellung des Integrals aufbauen: die (Re-)Konstruktionsvorstellung. Dies gelingt aber durch einen falschen Einsatz der elektronischen Hilfsmittel nicht. GeoGebra kann zwar eine beliebige Stammfunktion einer Funktion rekonstruieren, jedoch wird die Integrationskonstante nicht berücksichtigt, wodurch die Heranwachsenden einen falschen Eindruck des unbestimmten Integrals bekommen und in weiterer Folge keinen Konnex zwischen der Differential- und Integralrechnung herstellen können.

In Conclusio kann der fachdidaktisch reflektierte Einsatz von GeoGebra (und im Allgemeinen von höheren technischen Hilfsmitteln) den Schülerinnen und Schülern neue Sichtweisen auf die Mathematik geben. Die Lernenden sind durch die Verwendung von Technologie dazu in der Lage, eigene Erkenntnisse zu gewinnen und durch das entdeckende Lernen können diese selbstständig mathematisches Wissen aufbauen. Jedoch müssen die elektronischen Hilfsmittel immer mit Vorsicht im Unterricht eingesetzt werden und die Heranwachsenden müssen den sinnvollen Einsatz von Technologie erst erlernen. Es ist wichtig, dass den Schülerinnen und Schülern beigebracht wird, eine kritische Sichtweise auf höhere Technologie zu entwickeln und Ergebnisse nicht unreflektiert zu übernehmen.

Durch den Technologieeinsatz verlagert sich der Schwerpunkt im Unterricht, wodurch der Fokus auf anderen mathematischen Tätigkeiten, wie der Planung von Lösungswegen und der Interpretation und Argumentation von Ergebnissen im gegebenen Sachkontext, liegt. Trotzdem sollten die Lehrpersonen nicht vergessen, dass durch die Verwendung von technischen Hilfsmitteln grundlegende mathematische Fähigkeiten, wie z.B. Kopfrechnen, das Bewerten der Ergebnisse auf Sinnhaftigkeit oder Abschätzen von

Größenordnungen, verloren gehen können, wenn diese nicht ständig wiederholt und geübt werden (Lindner, 2015, S. 16). Deswegen ist es oft sinnvoll, nicht auf den Computer zurückzugreifen und mathematische Aufgabenstellungen mit altbewährten Methoden zu lösen (Kaenders & Schmidt, 2011, S. 1).

Letztendlich kommt es aber immer auf die Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer an, wie oft und wie weit sie die höhere Technologie in den Unterricht integrieren. Wichtig ist es, dass die Lehrkräfte einen guten Mittelweg finden, um auch im *neuen* Mathematikunterricht den Lernenden ein größtmögliches Wissen zu vermitteln und ihr vollständiges mathematisches Potenzial zu entfalten.

Wie bereits des Öfteren erwähnt, belegen zahlreiche Studien, dass sich durch den Einsatz elektronischer Hilfsmittel die Leistungen der Jugendlichen verbessern (unter anderem: Övez, 2018; Vasquez, 2015; Majerek, 2014). Zu überprüfen bleibt jedoch, ob sich die Leistungen der Schülerinnen und Schüler im Inhaltsbereich Analysis in der SEK II an der AHS verbessern, wenn diesen die Themen mithilfe eines fachdidaktisch reflektierten GeoGebra-Einsatzes vermittelt werden, gegenüber jenen, die ohne den Einsatz höherer technischer Hilfsmittel unterrichtet werden. Des Weiteren wäre zu prüfen, ob die Lernenden durch den richtigen Technologieeinsatz tragfähigere Grundvorstellungen aufbauen können als beim herkömmlichen Mathematikunterricht, was in weiterer Folge zu einem besseren Mathematikverständnis führe.

Literaturverzeichnis

Academic. (2020). *Funktionenplotter*. <https://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/481871>.

Verifiziert am 03.12.2020 um 10:04.

Bayaga A., Mthethwa M. M., Bossé M. J. & Williams D. (2019): Impacts of implementing GeoGebra on eleventh grade student's learning of Euclidean geometry. In *South African Journal of Higher Education*, 33, 6 (S. 32-54). <https://www.journals.ac.za/index.php/sajhe/article/view/2824/2225>. Verifiziert am 19.04.2020 um 11:15.

Blum W. & Törner G. (1983): *Didaktik der Analysis*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung (2019): *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik. Inhaltliche und organisatorische Grundlagen zur Sicherung mathematischer Grundkompetenzen. Stand: April 2019*. https://www.matura.gv.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/MA/srp_ma_grundkonzept_2019-09-03.pdf. Verifiziert am 14.09.2020 um 09:16.

Casio Europe. (2020). *Class Pad II (FX-CP400)*. <https://www.casio-europe.com/de/produkte/schul-und-grafikrechner/cas-grafikrechner/fx-cp400/>. Verifiziert am 14.09.2020 um 09:32.

Danckwerts R. & Vogel D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Edwards J.-A. & Jones K. (2006): Linking Geometry and Algebra with GeoGebra. In *MATHEMATICS TEACHING, incorporation MicroMath 194* (S. 28-30). https://www.researchgate.net/publication/265355489_Linking_geometry_and_algebra_with_GeoGebra. Verifiziert am 15.09.2020 um 09:48.

Emaikwu S. O., Iji C. & Abari T. (2015): Effect of GeoGebra on Senior Secondary School Students' Interest and Achievement in Statistics in Makurdi Local Government Area of Benue State, Nigeria. In *IOSR Journal of Mathematics*, 11, 3 (S. 14-21). https://www.academia.edu/41496780/Effect_of_Geogebra_on_Senior_Secondary_School_Students_Interest_and_Achievement_in_Statistics_in_Makurdi_Local_Government_Area_of_Benue_State_Nigeria. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:38.

GeoGebra. (2020a). *Was ist GeoGebra?* <https://www.geogebra.org/about>. Verifiziert am 14.09.2020 um 09:58.

GeoGebra. (2020b): *Werkzeuge der Grafikansicht*. https://wiki.geogebra.org/de/Werkzeuge_der_Grafik-Ansicht. Verifiziert am 23.10.2020 um 09:23.

- GeoGebra. (2020c): *Nullstelle (Werkzeug)*.
[https://wiki.geogebra.org/de/Nullstellen_\(Werkzeug\)](https://wiki.geogebra.org/de/Nullstellen_(Werkzeug)). Verifiziert am 23.10.2020 um 09:46.
- GeoGebra. (2020d): *Nullstelle (Befehl)*.
[https://wiki.geogebra.org/de/Nullstelle_\(Befehl\)](https://wiki.geogebra.org/de/Nullstelle_(Befehl)). Verifiziert am 23.10.2020 um 09:43.
- GeoGebra. (2020e): *Extremstelle (Befehl)*.
[https://wiki.geogebra.org/de/Extremum_\(Befehl\)](https://wiki.geogebra.org/de/Extremum_(Befehl)). Verifiziert am 23.10.2020 um 10:00.
- GeoGebra. (2020f): *Regressionsgerade (Werkzeug)*.
[https://wiki.geogebra.org/de/Regressionsgerade_\(Werkzeug\)](https://wiki.geogebra.org/de/Regressionsgerade_(Werkzeug)). Verifiziert am 24.10.2020 um 10:07.
- GeoGebra. (2020g): *Löse (Befehl)*. [https://wiki.geogebra.org/de/Löse_\(Befehl\)](https://wiki.geogebra.org/de/Löse_(Befehl)).
 Verifiziert am 24.10.2020 um 10:30.
- GeoGebra. (2020h): *Ableitung (Befehl)*.
[https://wiki.geogebra.org/de/Ableitung_\(Befehl\)](https://wiki.geogebra.org/de/Ableitung_(Befehl)). Verifiziert am 24.10.2020 um 10:56.
- GeoGebra. (2020i): *Integral (Befehl)*. [https://wiki.geogebra.org/de/Integral_\(Befehl\)](https://wiki.geogebra.org/de/Integral_(Befehl)).
 Verifiziert am 24.10.2020 um 11:18.
- Gómez-Chacón I. & Joglar Prieto N. (2010): Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach. In *Educ. Matem. Pesq, Sao Paulo*, 12, 3 (S. 485-513).
<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4644/3716>. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:48.
- Greefrath G., Oldenburg R., Siller H.-S., Ulm V. & Weigand H.-G. (2016): *Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer.
- Herget W. (2013): Funktionen – immer gut für eine Überraschung. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten* (S. 47-61). Wiesbaden: Springer.
- Heugl H. (2014): *Mathematikunterricht mit Technologie. Ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl an Aufgaben. 9. bis 13. Schulstufe*. Linz: Veritas-Verlag.
- Hohenwarter J., Hohenwarter M. & Lavicza Z. (2008): Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. In *Jl. of Computer in Mathematics and Science Teaching*, 28, 2 (S. 135-146).
https://www.researchgate.net/publication/315689337_Introducing_Dynamic_Mathematics_Software_to_Mathematics_Teachers_the_Case_of_GeoGebra.
 Verifiziert am 04.04.2020 um 15:28.

- Hohenwarter M. & Jones K. (2007): Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. In D. Küchemann (Hrsg.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27, 3 (S. 126-131).
https://www.researchgate.net/publication/239830609_Ways_of_linking_geometry_and_algebra_The_case_of_GeoGebra. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:30.
- Horzum T. & Ünlü M. (2017): Pre-service mathematic teachers' views about GeoGebra and its use. In *Acta Didactica Napocensia*, 10, 3 (S. 77-90).
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1160574.pdf>. Verifiziert am 11.03.2020 um 11:59.
- Kaenders R. & Schmidt R. (2011). Zu einem tieferen Mathematikverständnis. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 1-11). Wiesbaden: Springer.
- Kaenders R. (2011). Funktionen kann man nicht sehen. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 146-166). Wiesbaden: Springer.
- Lindenbauer E. (2015): Unterstützung des funktionalen Denkens in der Sekundarstufe 1. In L. Del Chicca & M. Hohenwarter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Dialog. Perspektiven und Wege* (S. 69-82). Linz: Trauner Verlag.
- Lindner A. (2015): Technologieeinsatz im Mathematikunterricht – Fortbildungskurse in OÖ. In L. Del Chicca & M. Hohenwarter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Dialog. Perspektiven und Wege* (S. 9-20). Linz: Trauner Verlag.
- Majerek D. (2014): Application of GeoGebra for teaching Mathematics. In *Advances in Science and Technology Research Journal*, 8, 24 (S. 51-54).
https://www.researchgate.net/publication/307649088_APPLICATION_OF_GEOGEBRA_FOR_TEACHING_MATHEMATICS. Verifiziert am 11.03.2020 um 11:53.
- Malle G. (ohne Jahr): *Grundvorstellungen im Mathematikunterricht*.
https://www.imst.ac.at/imst-wiki/images/8/83/Langfassung_Grundbildung_Malle.pdf. Verifiziert am 27.09.2020 um 16:12.
- Mudaly V. & Fletcher T. (2019): The effectiveness of GeoGebra when teaching linear functions using the iPad. In *Problems of Education in the 21st Century*, 77, 1 (S. 55-81). http://www.scientiasocialis.lt/pec/node/files/pdf/vol77/55-81.Mudaly_Vol.77-1_PEC.pdf. Verifiziert am 04.04.2020 um 16:04.
- Neumann R. (2018): *Zum Einfluss von Computeralgebrasystemen auf mathematische Grundfertigkeiten. Eine empirische Bestandsaufnahme*. Wiesbaden: Springer.

- Övez F. T. D. (2018): The Impact of Instructing Quadratic Functions with the Use of GeoGebra Software on Students' Achievement and Level of Reaching Acquisitions. In *International Education Studies*, 11, 7 (S. 1-11).
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1184124.pdf>. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:49.
- Pöchtrager H. (2015): Entdeckendes Lernen mit GeoGebra. In L. Del Chicca & M. Hohenwarter (Hrsg.), *Mathematikdidaktik im Dialog. Perspektiven und Wege* (S. 155-169). Linz: Trauner Verlag.
- Rechtsinformationssystem des Bundes (2020). *Bundesrecht konsolidiert: Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen, Fassung vom 18.09.2020*.
<https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568>. Verifiziert am 18.09.2020 um 09:40.
- Reich K. (2008): *Konstruktivistische Didaktik. Lehr- und Studienbuch mit Methodenpool*. Basel: Beltz Verlag.
- Reinmann G. & Mandl H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten. In A. Krapp & B. Weidenmann (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie. Ein Lehrbuch*. 5., vollständig überarbeitete Auflage (S. 613-658). Basel: Beltz Verlag.
- Schmidt R. (2011). Auf Entdeckungsreise zu den Nullstellen quadratischer Funktionen. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 41-55). Wiesbaden: Springer.
- Seebach G. (2011). Ableitungsregeln mit GeoGebra selbst entdecken – nicht nur für Polynome. In R. Kaenders & R. Schmidt (Hrsg.), *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen* (S. 84-102). Wiesbaden: Springer.
- Standardisierte Reife- und Diplomprüfung. (2020). *Mathematik*.
<https://www.matura.gv.at/?id=103>. Verifiziert am 14.09.2020 um 09:18.
- Texas Instruments. (2020). *Graphikrechner TI-Nspire™ CX II-T*.
<https://education.ti.com/de-at/produkte/taschenrechner/graphikrechner-und-cas/ti-nspire-cx-ii-cx-ii-cas>. Verifiziert am 14.09.2020 um 09:36.
- Tietze U.-P., Klika M. & Wolpers H. (1997): *Mathematik in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
- Vasquez D. E. (2015): *Enhancing student achievement using GeoGebra in a technology rich environment. Masterarbeit*. Pomona: Faculty of California State Polytechnic University. <https://core.ac.uk/download/pdf/48498993.pdf>. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:23.

- Velichová D. (2011): Interactive Maths with GeoGebra. In *International Journal of Emerging Technologies in Learning (IJET)*, 6 (S. 31-35).
https://www.researchgate.net/publication/220049727_Interactive_Maths_with_GeoGebra. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:42.
- Vollrath H.-J. (1989): Funktionales Denken. In *Journal für Mathematikdidaktik* 10 (S. 1-43). <http://www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/papers/052.pdf>. Verifiziert am 26.09.2020 um 09:22.
- Wassie Y. A. & Zergaw G. A. (2019): Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. In *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 2019, 15(8), em1734 (S. 1-11). <https://doi.org/10.29333/ejmste/108436>. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:55.
- Weinhandl R., Hohenwarter M., Schallert S. & Lavicza Z. (2020): Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. In *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology (IJEMST)*, 8, 1 (S. 1-15).
<https://www.researchgate.net/publication/338711121>. Verifiziert am 06.04.2020 um 13:30.
- Zulnaldi H. & Zamri S. N. A. S. (2016): The Effectiveness of the GeoGebra Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge On Students' Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. In *EURASIE Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 6 (S. 2155-2180).
<https://www.ejmste.com/download/the-effectiveness-of-the-geogebra-software-the-intermediary-role-of-procedural-knowledge-on-students-4764.pdf>. Verifiziert am 04.04.2020 um 15:36.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe verfasst, dabei die Richtlinien guter wissenschaftlicher Praxis eingehalten und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet, sowie die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht zu haben. Die Arbeit wurde bisher in identer oder ähnlicher Form an keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

19.12.2020