



Gregor Überwimmer, BSc

Sensitivitätsanalyse von dynamischen Systemen

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuerin

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Katrin Ellermann

Institut für Mechanik

Graz, Dezember 2021

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Datum, Unterschrift

Abstract

In this thesis is the sensitivity analysis applied to two different dynamical systems. The sensitivities of the parameters are calculated by the total Sobol' indices. To calculate them, two different strategies are followed. Either the Monte Carlo Simulation with high numerical expenditures or the Polynomial Chaos Expansion where a metamodel is created first and the total Sobol' indices are calculated afterwards. Through the comparison of the results it is possible to show where the procedures can be applied. The application of the Monte Carlo Simulation as well as the Polynomial Chaos Expansion are shown and the results are analyzed.

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird die Sensitivitätsanalyse an zwei dynamischen Systemen angewendet. Bei der Berechnung der Sensitivitäten der Parameter werden jeweils die Totalen Sobol' Indizes berechnet. Zur Berechnung dieser werden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt. Auf der einen Seite die Monte-Carlo-Simulation, welche mit einem enormen numerischen Aufwand verbunden ist, und auf der anderen Seite die Polynomial Chaos Expansion, wobei zuerst ein Metamodell erstellt wird und in weiterer Folge die Totalen Sobol' Indizes berechnet werden. Durch einen Vergleich der Resultate ist es möglich, die Anwendbarkeit der beiden Berechnungsmethoden zu zeigen. Die Anwendung der Monte-Carlo-Simulation als auch die Polynomial Chaos Expansion werden gezeigt, und die Ergebnisse werden analysiert.

Danksagung

Ich möchte Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Katrin Ellermann, der Leiterin des Instituts für Mechanik, dafür danken, dass sie mir die Möglichkeit gegeben hat, diese Arbeit in einem sehr interessanten Bereich zu verfassen. Des Weiteren möchte ich mich für ihre fachliche Betreuung, als auch für die vielen wertvollen Anregungen bedanken.

Meinen Eltern Margarethe und Markus sowie meinem Bruder Matthias möchte ich für die Unterstützung und den stetigen Ansporn für das Einhalten meiner Ziele danken.

Ein besonderer Dank gilt meiner Frau Michaela für die Geduld und Ermutigung während des Verfassens dieser Arbeit und während meines gesamten Studiums.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	8
Tabellenverzeichnis	10
1 Einleitung	11
1.1 Stand der Technik	11
1.2 Aufgabenstellung der Arbeit	12
1.3 Aufbau der Arbeit	12
2 Grundlagen	14
2.1 Das Modell	14
2.2 Sensitivitätsanalyse	14
2.2.1 Methoden der Sensitivitätsanalyse	15
2.2.2 Lokale und Globale Betrachtung	16
2.2.3 Screening Techniken	18
2.2.4 Vorbereitungen für eine Sensitivitätsanalyse	19
2.3 Monte-Carlo-Simulation (MC)	19
2.4 Metamodell - Polynomial Chaos Expansion	20
2.4.1 Metamodell	20
2.4.2 Polynomial Chaos Expansion	20
2.5 Dynamische Systeme	23
2.5.1 Beispielsystem 1: Duffing-Oszillator	23
2.5.2 Beispielsystem 2: Mathieusche Differentialgleichung	25
3 Duffing-Oszillator	26
3.1 Modellierung des Duffing-Oszillator	26
3.2 Vorbereitungen zur Sensitivitätsanalyse des Duffing-Oszillator	26
3.3 Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators	32
3.3.1 Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators mittels Monte-Carlo-Simulation	32

3.3.2	Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators mittels Polynomial Chaos Expansion	33
3.4	Analyse der Sensitivitäten des Duffing-Oszillators	34
3.5	Vergleich des Rechenaufwandes der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators	42
4	Mathieusche Differentialgleichung	43
4.1	Modellierung der Mathieusche Differentialgleichung	43
4.2	Vorbereitungen zur Sensitivitätsanalyse der Mathieuschen Differential- gleichung	45
4.3	Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieusche Differentialgleichung	49
4.3.1	Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differenti- algleichung mittels Monte-Carlo-Simulation	49
4.3.2	Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differenti- algleichung mittels Polynomial Chaos Expansion	49
4.4	Analyse der Sensitivitäten der Mathieuschen Differentialgleichung	50
4.5	Vergleich des Rechenaufwandes der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differenzialgleichung	60
5	Schlussbetrachtung	61
5.1	Anwendbarkeit der Verfahren	61
5.2	Zielkonflikt Genauigkeit - Rechenzeit	61
	Literatur	62

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ablauf der Arbeit	13
2.1	Sprungphänomen Duffing-Oszillator	24
2.2	Stabilitätskarte für die Mathieusche Differentialgleichung [7]	25
3.1	Frequenzbetrachtung Duffing-Oszillator mit $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	28
3.2	Frequenzbetrachtung Duffing-Oszillator mit unterschiedlichen Parametern c_3^*	29
3.3	Amplitude des Duffing-Oszillators mit $\Omega = 3.11s^{-1}$ und $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	30
3.4	Ausschnitt des Ausgangs des Duffing-Oszillators mit $\Omega = 3.11s^{-1}$ und $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	31
3.5	Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $\Omega =$ $0.36s^{-1}$ und $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	33
3.6	Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	35
3.7	Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.02 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	37
3.8	Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	39
3.9	Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.25 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	40
3.10	Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	41
4.1	Invertiertes Pendel mit Fußpunktanregung	43
4.2	Stabilitätskarte der Mathieuschen Differenzialgleichung mit negativen α - gelb zeigt stabilen Bereich an	46
4.3	Stabilitätskarte der Mathieuschen Differenzialgleichung für Parametersatz 1 - gelb zeigt stabilen Bereich an	47
4.4	Stabilitätskarte der Mathieuschen Differenzialgleichung für Parametersatz 2 - gelb zeigt stabilen Bereich an	48
4.5	Stabilitätskarte der Mathieuschen Differenzialgleichung für Parametersatz 3 - gelb zeigt stabilen Bereich an	48
4.6	Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 1	51
4.7	Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 1 aus den beiden Berechnungsmethoden	52

4.8	Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2	53
4.9	Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2 aus den beiden Berechnungsmethoden	54
4.10	Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 3	55
4.11	Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 3 aus den beiden Berechnungsmethoden	56
4.12	Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2'	58
4.13	Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2' aus den beiden Berechnungsmethoden mit erhöhter Sample-Anzahl	59

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter-Satz Sprungphänomen Duffing-Oszillator	25
3.1	Parameter-Sätze des Duffing-Oszillators	27
3.2	Referenzen der Frequenzbetrachtung und der zu analysierende Bereich . .	28
3.3	Verteilung der Parameter des Duffing-Oszillators	31
3.4	Rechenaufwand Duffing-Oszillator	42
4.1	Parameters der Mathieuschen Differenzialgleichung	47
4.2	Parametersatz 2' der Mathieuschen Differenzialgleichung	57
4.3	Rechenaufwand Mathieuschen Differenzialgleichung	60

1 Einleitung

Die Bedeutung von numerischen Simulationen nimmt kontinuierlich zu und in gleicher Weise auch die Rechenleistung unserer Computer. In vielen Branchen ist heutzutage eine Simulation von mechanischen Systemen nicht mehr wegzudenken, um sich aus Unternehmenssicht Zeit und Geld zu ersparen.

Die betrachteten Systeme werden jedoch immer umfangreicher und komplexer, dies erfordert umso mehr zu wissen, welche Eingänge, beziehungsweise Parameter des Systems, die Entscheidenden und die Wichtigen sind. Diese Parameter können mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse identifiziert werden. Dabei wird zuerst ein Model des betrachteten Systems erstellt. Im Anschluss erfolgt die eigentliche Analyse. Mithilfe unterschiedlicher Verfahren und Methoden können je nach Anwendungsfall die notwendigen Sensitivitäten des Systems bestimmt werden und mittels unterschiedlicher Auswerteverfahren analysiert werden.

Durch diese Betrachtung der Ergebnisse kann somit auf die wichtigen Eigenschaften und Parameter des Systems rückgeschlossen werden. Dies erspart Zeit und Rechenkosten, denn eine Betrachtung von unwesentlichen Parametern ist nicht mehr erforderlich.

1.1 Stand der Technik

Um ein technisches System simulieren zu können, wird zunächst eine mathematische Beschreibung benötigt. Diese mathematische Beschreibung, zumeist in Form von Differenzialgleichungen oder differenzialalgebraischen Gleichungen werden diskretisiert und in dieser Form in einem Computerprogramm implementiert [11]. In diesem Programm ist es möglich, mittels unterschiedlicher Methoden und Verfahren die Sensitivitäten der unterschiedlichen Parameter zu bestimmen und zu analysieren.

Eine dieser Methoden ist die Monte-Carlo-Simulation. Dabei erfolgt eine Vielzahl von Einzelsimulationen aus einer Zufallsstichprobe der Parameter und einer statistischen Auswertung, um die gewünschten Sensitivitäten zu bestimmen. Vorteile dieser Methode sind ihre flexible Anwendbarkeit und die wenigen Anforderungen an die mathematische Beschreibung des Systems. Nachteilig zeigt sich der enorme Rechenaufwand, der durch die vielen Berechnungen erforderlich ist [12].

Eine alternative Methode ist die Erstellung eines Metamodells. Bei einem Metamodell wird das ursprüngliche mathematische Modell auf einen Satz an Gleichungen zurückgeführt, welcher wesentlich leichter auszuwerten ist. Dabei zeigt sich der Vorteil, dass die Berechnung der Sensitivitäten sehr viel effizienter möglich ist. Allerdings ist ein entscheidender Nachteil, dass gegebenenfalls Ungenauigkeiten, insbesondere bei nennenswerten Nichtlinearitäten, auftreten. Eine starke Metamodelltechnik ist die Polynomial Chaos Expansion (PCE). Von diesem Metamodell können die Sensitivitäten berechnet werden [8].

Fokus wird in dieser Arbeit auf den Vergleich dieser zwei unterschiedlichen Methoden und Ansätze von Sensitivitätsanalysen an zwei unterschiedlichen dynamischen Systemen gelegt.

1.2 Aufgabenstellung der Arbeit

Da sich die zuvor genannten Methoden deutlich unterscheiden, ist es Ziel dieser Arbeit, die Grenzen der Anwendbarkeit herauszuarbeiten und dabei Vor- und Nachteile genauer zu erfassen. Dafür werden zwei Beispielsysteme verwendet, die gerade im Bereich der nichtlinearen Dynamik bekannt sind. Diese sind zum einen der Duffing-Oszillator und zum anderen die Mathieusche Differenzialgleichung.

Für diese beiden Systeme wird zuerst jeweils ein numerisches Modell erstellt. In weiterer Folge wird dieses System mit den unterschiedlichen Methoden untersucht und analysiert. Diese Analyse erfolgt in *Matlab*®R2019a mit Hilfe der Erweiterung *UQLab* [10].

1.3 Aufbau der Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Nach der Beschreibung der benötigten Theorie für diese Arbeit erfolgt die Umsetzung der Sensitivitätsanalyse des ersten dynamischen Systems im Computerprogramm. Dafür wird zuerst ein numerisches Modell erstellt. In *Matlab*®R2019a erfolgen die Berechnungen mit Hilfe der Erweiterung *UQLab* [10]. Nach der Implementierung des Differenzialgleichungssystems folgt eine geeignete Wahl der Parameter und die Festlegung der Verteilung der Parameter. Das implementierte dynamische System wird im Anschluss als betrachtendes Modell festgelegt und es folgt die Berechnung der Sensitivitäten mit der Monte-Carlo-Simulation. Durch eine geeignete Wahl der Ausgabe werden repräsentative Ergebnisse dargestellt. Das selbe Vorgehen erfolgt auch mittels der Polynomial Chaos Expansion, wo ein Metamodell erstellt wird und anschließend die Sensitivitäten berechnet

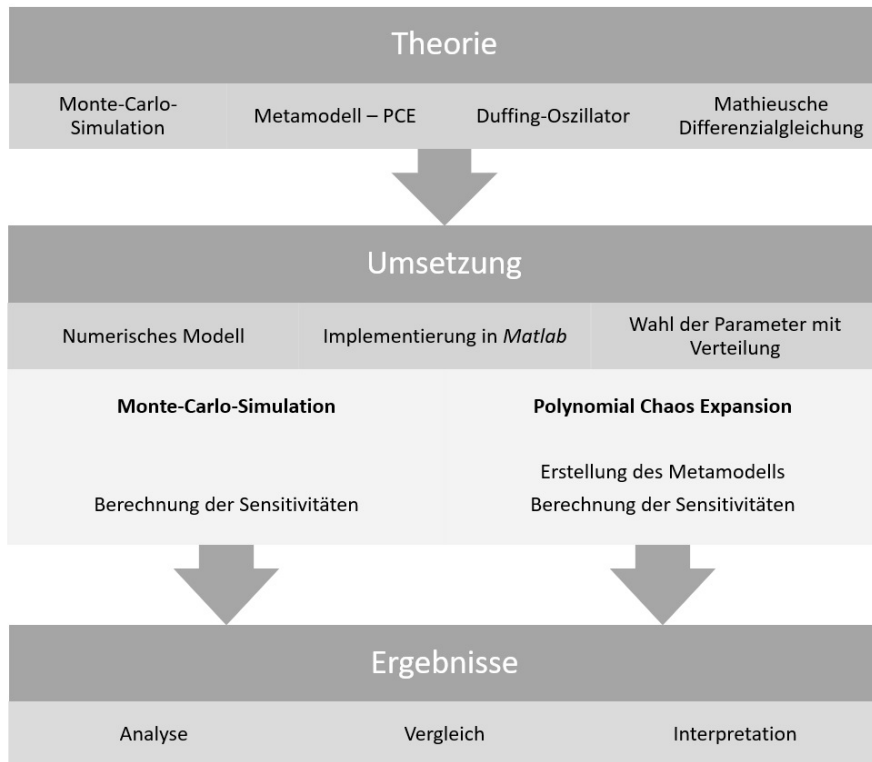


Abbildung 1.1: Ablauf der Arbeit

werden. Danach können die Ergebnisse der beiden Methoden verglichen und interpretiert werden.

Für das zweite dynamische System erfolgt die Vorgehensweise analog. Nach der Erstellung des numerischen Modells folgt die Abbildung des Systems in *Matlab*® *R2019a*. Anschließend werden die Parameter mit deren Verteilung festgelegt. Die beiden Methoden werden auf das zweite System angewendet und die Ergebnisse verglichen und interpretiert.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundbegriffe Modell und Sensitivitätsanalyse, welche in dieser Arbeit Anwendung finden, beschrieben. Außerdem werden die beiden verwendeten Verfahren für die Sensitivitätsanalyse erklärt. Darunter fällt zum einen die Methode, die die Sensitivitäten mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation berechnet. Zum anderen wird die Methode behandelt, bei der zu Beginn ein Metamodell erstellt wird, anhand dessen im weiteren Verlauf die Sensitivitäten berechnet werden.

Des Weiteren werden die beiden simulierten dynamischen Systeme behandelt. So werden der durch sein Sprungphänomen charakterisierte Duffing-Oszillator und die parametrisch angeregte Schwingung, die Mathieusche Differentialgleichung, beschrieben.

2.1 Das Modell

In diesem Abschnitt ist die Rede von einem mathematischen Modell $\mathcal{M}(x)$.

Grundsätzlich kann ein Modell $\mathcal{M}(x)$ abhängig von seinen Eingangsvariablen (x_1, x_2, \dots, x_n) sein. Ganz allgemein können somit die Eingangsvariablen durch einen Vektor \mathbf{X} beschrieben werden. Das Resultat des Eingangs wird durch

$$\mathbf{Y} = \mathcal{M}(\mathbf{X}), \quad (2.1)$$

bestimmt, wobei \mathbf{Y} den Ausgangsvektor beschreibt. Dieser Ausgang ist daher von der Veränderlichkeit aller Eingangsvariablen abhängig [9].

2.2 Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse wird verwendet, um das in Abschnitt 2.1 beschriebene Modell $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ zu simplifizieren. Ziel dabei ist, die wesentlichen Eingangsparameter x_i des Modells $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ zu finden und eine Reduktion dieses Modells zu erreichen. Hier ist die Rede von einer Reduktion der Dimension des Problems. Durch diese Dimensionsreduktion wird die Anzahl an Berechnungen reduziert. Folglich wird die Computerrechenzeit reduziert und für die wenigen wesentlichen Parameter können genauere Messdaten erhoben

werden. Die Sensitivitätsanalyse liefert einen „black-Box“-Ansatz. Die Berechnung der Modellantwort erfolgt mit wenigen Eingangsparametersätzen. Diese werden in der Art gewählt, dass eine möglichst große Information über das Modell $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ erhalten wird [9].

Allgemein kann die Korrelation von Stichproben der Eingangsparameter mit Stichproben der Ausgabewerten beobachtet werden, hierbei wird von „correlation-based measures“ gesprochen. Alternativ können auch die Werte der partiellen Ableitungen des Modells beziehungsweise an einem bestimmten Punkt, auch bekannt als linearisierte Methoden, betrachtet werden. Eine weitere Möglichkeit ist die direkte Betrachtung der Verteilung der Ausgabewerten des Modells [9].

2.2.1 Methoden der Sensitivitätsanalyse

Die nachfolgende Beschreibung der Methoden der Sensitivitätsanalyse soll die wesentlichen Methoden erläutern und orientiert sich dabei an dem „UQLab user manual – Sensitivity analysis“ von Marelli und Sundret [9]. Innerhalb der Sensitivitätsanalysen werden drei Methoden unterschieden, diese sind die Sample-based Methode, die Linearisierte Methode und die Globale Methode.

Die Sample-based Methode basiert auf Postprocessing von verfügbaren Monte-Carlo-Simulationen des Modells. Hier kann beispielhaft die Input/Output Correlation, bei der die direkte Beziehung zwischen Input und Output untersucht wird, angegeben werden. Alternativ gibt es die Standard Regression Coefficients, bei denen es sich um eine vereinfachte Varianzzerlegung handelt. Diese Methode führt nur bei unkorrelierten Eingangsparametern zu brauchbaren Ergebnissen.

Die Linearisierte Methode basiert auf der grundsätzlichen Annahme, dass das Modell linear ist oder um einen zentralen Wert linearisiert werden kann. Hierfür ist die Perturbation Method, bei der das Modell durch eine Taylorreihe um einen interessanten Bereich ersetzt wird, ein Beispiel. Auch die Cotter Method fällt in diese Kategorie. Bei dieser Methode erfolgt ein Ranking der Eingangsparameter. Sie ist eine einfache und kostengünstige Methode. Zusätzlich kann sie unabhängig von Abhängigkeiten zwischen den Eingangsparametern angewendet werden. Für eine ausführlichere Beschreibung sei hier an die Literatur von Cotter verwiesen [2].

Bei Globalen Methoden werden sämtliche Eingangsparameter betrachtet. Diese Methode bezieht sich auf die unterschiedlichen Eigenschaften des Modellausgangs wie beispielhaft die Varianz oder die Verteilung. Darunter fällt zum Beispiel der Morris' Elementary Effect. Dieser stellt die Mittelwerte μ_i und Standardabweichungen σ_i der Verteilung des Modellausgangs grafisch gegenüber. Sollte dabei der Mittelwert groß sein, so

ist dieser Parameter im betrachteten Modell besonders relevant. Ist hingegen die Standardabweichung groß, so ist ein nichtlinearer Anteil oder eine Abhängigkeit zu einer anderen Eingangsvariable im Parameter vorhanden. Somit trifft die lineare Hypothese des Morris' Elementary Effect weniger zu. Die Eingangsparameter werden in drei Gruppen klassifiziert:

1. Parameter mit vernachlässigbarem Einfluss,
2. unabhängige Parameter mit großem linearem Einfluss und
3. Parameter mit großen nichtlinearen und/oder abhängigen Parametern.

Ein weiteres Beispiel für Globale Methoden sind die Borgonovo Sensitivity Indices. Dabei erfolgt die Bestimmung von Teilen des Indizes entweder durch eine histogrammbasierte Schätzung oder durch eine Cumulative Density Function (CDF) Schätzung. Eine grafische Darstellung der Indizes in Form eines Histogramms des geschätzten Parameterwertes über den Modellausgang ist möglich.

Eine weitere Globale Methode ist der Sobol' Sensitivity Indices. Hierbei wird das Modell durch Summen beschrieben. Die Gesamtvarianz dieses Modells ist durch die Summe der Varianzen der Summanden bestimmt. Die durchgeführte Zerlegung gilt allerdings nur für unabhängige Eingangsvariablen. In der Literatur wird diese Methode oft als Varianzanalyse (ANOVA) bezeichnet. Eine ausführlichere Beschreibung erfolgt im nachfolgenden Abschnitt. Auch der ANCOVA (ANalysis Of COVariance) Sensitivity Indices fällt unter die Globalen Methoden. Dabei werden mittels einer Kovarianzzerlegungsmethode Sensitivitätsindizes bestimmt. Bei dieser Methode ist es auch möglich, für abhängige Eingangsparametern Sensitivitäten zu bestimmen. Des Weiteren gehören auch die Kucherenko Sensitivity Indices zu den Globalen Methoden. Dabei wird ein alternativer Ansatz zu der ANCOVA Sensitivity Indices verfolgt. Hierbei erfolgt eine Bestimmung der Sensitivitätsindizes durch eine direkte Zerlegung der Ausgangsvarianz, wobei diese nach dem Gesetz der Gesamtvarianz definiert wird.

2.2.2 Lokale und Globale Betrachtung

Lokale Sensitivität

Als eine weitere Betrachtung der Sensitivitäten speziell für nichtlineare Systeme wird der Ansatz einer lokalen Sensitivität verfolgt. Dabei wird das Modell durch die Funktion

$$y = f(\mathbf{X}) \tag{2.2}$$

beschrieben und die Sensitivität durch die partielle Ableitung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_k} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \quad (2.3)$$

an der Stelle \mathbf{X}^* berechnet. Die gesuchte Lösung wird durch

$$y^* = f(\mathbf{X}^*) \quad (2.4)$$

dargestellt [14].

Globale Sensitivität - Sobol' Indizes

Die globale Sensitivität macht hingegen keinen Unterschied zwischen \mathbf{X} und \mathbf{X}^* und bevorzugt so die Lösung des gesamten Modells gegenüber einer speziellen Lösung [14]. Somit ist es auch möglich, dass der Sensitivitätsindex von einem Parameter berechnet wird, wenn die anderen Parameter variieren [13].

Die nachfolgende Herleitung des Sobol' Index soll die Grundannahmen erläutern und orientiert sich dabei an „Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates“ von Sobol [14]. Ausgegangen wird von einer Funktion

$$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s}^n f_{i_1 \dots i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}), \quad (2.5)$$

die in \mathcal{I}^n definiert ist und deren Quadrat integrierbar ist. \mathcal{I} wird hier als Einheitsintervall mit der Dimension n festgelegt.

Die Integration des Quadrats der Funktion $f(\mathbf{X})$ liefert

$$\int f^2(\mathbf{X}) d\mathbf{X} - f_0^2 = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s}^n \int f_{i_1 \dots i_s}^2 dX_{i_1} \dots dX_{i_s}. \quad (2.6)$$

Die Konstanten

$$D = \int f^2(\mathbf{X}) d\mathbf{X} - f_0^2 \quad (2.7)$$

und

$$D_{i_1 \dots i_s} = \int f_{i_1 \dots i_s}^2 dX_{i_1} \dots dX_{i_s} \quad (2.8)$$

werden als Varianzen bezeichnet. Somit lässt sich Gleichung (2.6) auch schreiben als

$$D = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s}^n D_{i_1 \dots i_s}. \quad (2.9)$$

Dies beruht darauf, dass eine gleichverteilte Zufallsvariable \mathbf{X} in \mathcal{I}^n gewählt wird. Die Funktionen $f(\mathbf{X})$ und $f_{i_1 \dots i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})$ sind folglich zufällige Variablen mit den Varianzen D und $D_{i_1 \dots i_s}$.

Die Definition des Sobol' Index erfolgt durch

$$S_{i_1 \dots i_s} = \frac{D_{i_1 \dots i_s}}{D}. \quad (2.10)$$

Dabei wird s als Ordnung beziehungsweise als Dimension des Index bezeichnet. Die Sensitivitätsindizes sind stets positiv und werden alle Indizes summiert, so ist die Summe

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1. \quad (2.11)$$

Mit dieser Methode kann eine Reihung der Variablen in $f(X_1, \dots, X_n)$ durchgeführt werden. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die unwesentlichen Variablen in $f(X_1, \dots, X_n)$ festzulegen. Außerdem können dadurch Terme höherer Ordnung der Gleichung (2.5) eliminiert werden.

Der totale Sobol' Index wird aus der Summe

$$S_i^T = \sum_{\{i_1 < \dots < i_s\} \supset i} S_{i_1, \dots, i_s} \quad (2.12)$$

berechnet. Dabei werden alle Sobol' Indizes summiert, die die betrachtete Variable inkludieren. Diese Berechnung ist jedoch nicht sehr praktikabel, da alle unterschiedlichen Indizes berechnet werden müssen. Daher erfolgt die Berechnung auch mit

$$S_i^T = 1 - S_{\sim i}. \quad (2.13)$$

Somit ist nur die Berechnung jener Sobol' Indizes erforderlich, die die gesuchte Variable nicht beinhalten [9].

2.2.3 Screening Techniken

Unter Screening Techniken werden qualitative Methoden zur Untersuchung der Sensitivitäten des Modells verstanden. Gerade wenn das Modell sehr viele Eingangsvariablen hat, finden Screening Methoden Einsatz. Sie basieren auf der Diskretisierung der Eingabeparameter in Ebenen. Dies hat zur Folge, dass die Untersuchung des Parameterraums durch den Programmcode schneller möglich ist. Die am weitest verbreitete Methode im

Ingenieurbereich ist das „One At a Time“ (OAT) Design, wobei je ein Eingangsparameter variiert wird, während alle anderen konstant gehalten werden [4].

2.2.4 Vorbereitungen für eine Sensitivitätsanalyse

Um eine Sensitivitätsanalyse durchzuführen, werden zu Beginn die Eingangsparameter normiert. Des Weiteren muss entschieden werden, ob ein lokaler oder globaler Ansatz gewählt wird. Im Anschluss erfolgt ein Splitten der Modellfunktion in Summen von Funktionen mit steigender Dimension auch bekannt als „High Dimensional Model Representation“ (HDMR). Dies bewirkt die Trennung der Auswirkung der verschiedenen Eingangsparametern, welche durch die Zerlegung der Varianz verursacht wird. Danach können die Sensitivitätsindizes berechnet werden. Eine analytische Berechnung ist nur bei einfacher und bekannter Modellversion sinnvoll und möglich. Bei komplexeren Modellen oder bei Modellen mit vielen Eingangsparametern, erfolgt die Bestimmung der Sensitivitätsindizes mittels Schätzung. Diese können beispielsweise mittels einer Monte-Carlo-Simulation, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, oder, wenn diese zu aufwendig ist, durch Hilfe eines Metamodells zum Beispiel mit Polynomen bestimmt werden, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben. Zuletzt erfolgt eine anschauliche grafische Darstellung der Sensitivitätsindizes. Diese können über die Zeit oder auch über andere relevante Größen dargestellt werden. Die Größe der Werte beschreibt den Einfluss des Parameters [13]. Alternative Darstellungsmöglichkeiten sind zum einen Streudiagramme und zum anderen Spinnwebdiagramme, um ein Set aus berechneten Trajektorien darzustellen [4].

2.3 Monte-Carlo-Simulation (MC)

Die Monte-Carlo-Simulation beschreibt eine Simulation, welche auf einer wiederholten Zufallsstichprobe basiert. Anschließend erfolgt eine statistische Analyse der berechneten Ergebnisse. Sie kann auch als eine „What-if“ Analyse gesehen werden. Bei dieser Simulation wird zu Beginn die statistische Verteilung der Eingangsparameter identifiziert, diese werden als Quelle für jeden Eingang gesehen. Im Anschluss werden Zufallswerte jeder Verteilung generiert, welche den Wert des jeweiligen Eingangsparameter charakterisiert. Für jedes Eingangsparameterset wird ein Ausgangswert berechnet [12]. Damit ist die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation beendet und es kann mit einer statistischen Untersuchung der Ausgangswerte begonnen werden.

2.4 Metamodell - Polynomial Chaos Expansion

2.4.1 Metamodell

Eine Quantifizierung der Unsicherheit wird heutzutage immer wichtiger. Deterministische Vorhersagemodelle verlieren zunehmend an Bedeutung und es kommen immer mehr stochastische Modelle zum Einsatz. Dabei muss mit einer extrem großen Datenmenge umgegangen werden [8]. So kommt es dazu, dass eine reine Simulation der Daten sehr viel Rechenzeit benötigt, da mitunter ein sehr komplexes System beschrieben wird. Um die Kosten bei der Berechnung des Modells zu reduzieren, wird im Designprozess des Systems ein Metamodell erstellt. Dabei wird dies in der Literatur häufig als „model of the model“ bezeichnet [5]. Metamodellbasierte Methoden können auch verwendet werden, um das Verhalten eines experimentellen Systems zu simulieren [4].

Das Entwerfen eines Metamodells erfolgt im Wesentlichen in drei Schritten. Beim ersten Schritt wird die Art des Metamodells gewählt. Dabei stehen lineare Regressionsmodelle, nichtlineare parametrische oder nichtparametrische Metamodelle zur Wahl. Im zweiten Schritt wird das mitunter numerische Experiment designt. Als letzter Schritt folgt eine Validierung des Metamodells [4].

2.4.2 Polynomial Chaos Expansion

Die nachfolgende Beschreibung der Polynomial Chaos Expansion soll die wesentlichen Schritte erläutern und orientiert sich dabei an dem „UQLab user manual – Polynomial chaos expansions“ von Marelli, Lüthen und Sundret [8]. Polynomial Chaos Expansion ist eine sehr mächtige Metamodell-Technik. Ausgegangen wird von einem zufälligen Vektor mit unabhängigen Komponenten $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^M$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$. Des Weiteren wird ein Berechnungsmodell mit einer endlichen Varianz als Abbildung $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ mit $Y \in \mathbb{R}$ verwendet. Daraus folgt der Erwartungswert für Y^2 mit

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}^2(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty. \quad (2.14)$$

Die Definition der Polynomial Chaos Expansion von $\mathcal{M}(\mathbf{X})$ folgt als

$$Y = \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^M} y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}). \quad (2.15)$$

Dabei werden durch $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ multivariate Polynome, die orthonormal zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathbf{X}}$ sind, beschrieben. Der sogenannte Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^M$ identifiziert die Komponenten der multivariaten Polynome und $y_{\alpha} \in \mathbb{R}$ definiert die dazu-

gehörigen Koeffizienten. Die Summe aus der Gleichung (2.15) wird noch in eine endliche Summe gekürzt. Das Resultat

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) \approx \mathcal{M}^{PC}(\mathbf{X}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \quad (2.16)$$

beschreibt die gekürzte Polynomial Chaos Expansion. Dabei wird mit $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^M$ ein Set von Multi-Indizes von multivariaten Polynomen gewählt.

Die multivariaten Polynome $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ werden dabei durch ein Set aus univariaten orthonormalen Polynomen $\phi_k^i(x_i)$ dargestellt, welche durch

$$\left\langle \phi_j^i(x_i), \phi_k^i(x_i) \right\rangle \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}_i}} \phi_j^i(x_i) \phi_k^i(x_i) f_{\mathbf{X}_i}(x_i) dx = \delta_{jk} \quad (2.17)$$

definiert werden. Dabei beschreibt i die Eingangsvariable. Diese sind orthogonal so wie bereits die dazugehörigen Polynome. Der Polynomgrad wird durch j und k angegeben und $f_{\mathbf{X}_i}(x_i)$ gibt die i -te Eingangsrandverteilung an. Das Kroneckersymbol ist hierbei δ_{jk} . Die multivariaten Polynome $\Psi_{\alpha}(\mathbf{X})$ werden als Tensorprodukt aus den univariaten Teilen gebildet. So ergibt sich per Definition

$$\Psi_{\alpha}(\mathbf{X}) \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^M \phi_{\alpha_i}^i(x_i). \quad (2.18)$$

Die Orthogonalität der multivariaten Polynome folgt direkt aus Gleichung (2.17) mit

$$\left\langle \Psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \Psi_{\beta}(\mathbf{x}) \right\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.19)$$

wobei $\delta_{\alpha\beta}$ den mehrdimensionalen Fall des Kronecker Symbols beschreibt.

Die verwendbaren Polynome können unterschiedlichen Verteilungen zugeordnet werden. So sind beispielsweise orthogonale Legendre Polynome für eine Gleichverteilung geeignet und orthogonale Hermite Polynome für die Gauss-Verteilung. Für die Gamma-Verteilung werden orthogonale Laguerre Polynome verwendet und für die Beta-Verteilung orthogonale Jacobi Polynome. Zu beachten ist, dass die Berechnung der Polynomwerte mittels Wiederholungsrelation nicht immer stabil ist. So sollten zum Beispiel Laguerre und Jacobi Polynome über Grad 23 vermieden werden.

Ist keine der vorhergenannten Verteilungen zutreffend, so sind die Eingangsparameter nicht unabhängig beziehungsweise sind sie keine Standardpolynome, bestehen zwei Möglichkeiten. Die Erste ist eine isoprobabilistische Transformation. Die Zweite ist die Berechnung eines Polynomsets, welches orthonormal zur Nicht-Standardverteilung ist.

Bei der isoprobabilistischen Transformation wird von einem reduzierten Raum mit selber Dimension ausgegangen. Jedoch sind die Eingangsparameter unabhängig und besitzen Standard-Ränder. Die Transformation kann hoch nichtlinear sein. Diese hinzugebrachte Nichtlinearität kann allerdings einen erheblichen Nachteil in Bezug auf die Genauigkeit an der finalen gekürzten Polynomial Chaos Expansion haben.

Im Programm *UQLab* werden die Polynome mittels Stieltjes Prozedur berechnet. Dabei wird eine Sequenz von univariaten Polynomen erstellt, welche einen steigenden Grad besitzen und orthogonal zur gegebenen Verteilung sind. Die numerische Integration für das Innere Produkt erfolgt mit dem *Matlab*® adaptiven Integrator.

Bei praktischen Anwendungen sind nicht alle Terme der univariaten Polynome von gleich großer Bedeutung. Oft neigen die wichtigen Terme der Polynome eins zu werden, wobei nur wenige Variablen involviert sind. Hierbei wird auch von dem sparsity-of-effects Prinzip gesprochen.

Bei Anwendungen an realen Systemen ist oft nicht klar, welche finite Basis die beste Polynomial Chaos Expansion liefert. Auf der einen Seite müssen genügend Elemente vorhanden sein, um eine genaue Abbildung zu ermöglichen. Auf der anderen Seite limitiert die verfügbare Anzahl der experimentellen Entwurfsunkte die Größe der Basis. Es haben sich zwei Strategien etabliert, welche auch kombiniert werden können. Diese sind zum einen die Grad-Adaptivität und zum anderen die q-norm Adaptivität. Bei gegebener Zielgenauigkeit ϵ_T und maximaler Anzahl an Iterationen NI_{max} werden folgende Schritte durchgeführt. Zu Beginn wird eine initialisierte Basis mit einem oder mehreren Kürzungsschemata erstellt. Im Anschluss werden die Polynomial Chaos Expansion Koeffizienten berechnet und der Fehler ϵ_{LOO} , dieser wird auch „leave-one-out“ Fehler genannt, abgeschätzt. Die Berechnung erfolgt mit

$$\epsilon_{LOO} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathcal{M}^{PC \setminus i}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2}{\sum_{i=1}^N \left(\mathcal{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \hat{\mu}_Y \right)^2}. \quad (2.20)$$

Als letzter Schritt wird der Fehler mit dem festgelegten maximalen Fehler ϵ_T verglichen. Ist der Fehler kleiner als der maximale Fehler oder die maximale Anzahl an Iterationen erreicht, stoppt die Berechnung und gibt jenen Parameter mit dem geringsten Fehler zurück. Ist der Fehler noch zu groß und die maximale Anzahl an Iterationen noch nicht erreicht, so beginnt die Berechnung von vorne. Hier wird eine Fehlerabschätzungssensitivität benötigt, welche auf Überanpassung reagiert, damit der Algorithmus richtig konvergiert.

Die Koeffizienten y_α aus Gleichung (2.15) lassen sich auf unterschiedliche Weise berechnen. Im *UQLab* werden diese jedoch lediglich mittels Projektionsmethoden oder regressiver Methoden bestimmt. Mit Projektionsmethoden ist die Berechnung der Koeffizienten mittels numerischer Integration gemeint und mit regressiven Methoden wird ein System linearer Gleichungen mittels standard-linearer-regressions Ansätze gelöst. In dieser Arbeit wird eine Least-Angle-Regression verwendet, auf welche nachfolgend noch genauer eingegangen wird.

Least-Angle-Regression (LARS)

Die Least-Angle-Regression ist eine Methode der dünn besetzten Polynomial Chaos Expansion. Hierbei findet der LAR-Algorithmus seine Anwendung. Dieser Algorithmus ist ein lineares Regressionwerkzeug, welches auf iterativen Bewegungen von Regressoren von einem Kandidatenset zu einem Active-Set basiert. Die Wahl des nachfolgenden Regressors folgt auf seiner Korrelation mit dem aktuellen Residuum. Bei jeder dieser Iterationen werden analytische Beziehungen verwendet, um die am besten geeigneten Regressionskoeffizienten für das jeweilige Set zu finden. Dabei wird darauf geachtet, dass jeder aktive Regressor mit dem aktuellen Residuum gleichkorreliert ist. Die optimale Anzahl an Schritten dieser Methode kann durch geeignete Kriterien bestimmt werden. Wurden alle Iterationen beendet, wird jenes Kandidatenset verwendet, welches den geringsten Fehler ϵ_{LOO} aufweist. Dieses beschreibt somit die beste dünn besetzte Kandidatenbasis [8].

2.5 Dynamische Systeme

In dieser Arbeit wird das Augenmerk auf zwei unterschiedliche dynamische Systeme gelegt. Zum einen auf den Duffing-Oszillator und zum anderen auf die Mathieusche Differenzialgleichung. Nachfolgend sollen die bekanntesten Eigenschaften dieser beiden Beispielsysteme kurz vorgestellt werden.

2.5.1 Beispielsystem 1: Duffing-Oszillator

Der Duffing-Oszillator wird durch einen Term dritter Ordnung charakterisiert. Die allgemeine Gleichung wird durch

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x + c_3 \cdot x^3 = a \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (2.21)$$

beschrieben. Dabei gibt m die Masse, b die Dämpfung, c die lineare Federsteifigkeit, c_3 die nichtlineare Federsteifigkeit des Systems an. Das System wird mit einer Sinus-Schwingung angeregt, welche eine Amplitude a und eine Kreisfrequenz ω besitzt. Die fortlaufende Zeit wird durch die Variable t beschrieben. Einfachheitshalber wird die Gleichung (2.21) um einen Parameter reduziert. Das Resultat wird durch

$$\ddot{x} + b^* \cdot \dot{x} + c^* \cdot x + c_3^* \cdot x^3 = a^* \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (2.22)$$

beschrieben. Dabei wurden die Parameter b , c , c_3 und a durch die Masse m gekürzt, welche ungleich Null ist. Die neuen Parameter sind b^* , c^* , c_3^* und a^* .

Der Duffing-Oszillator zeigt als besondere Eigenschaft das Auftreten eines Sprungphänomens, bei dem sich die Amplitude in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz sprunghaft ändert. Eine weitere numerische Eigenschaft ist, dass bei der fortlaufenden Simulation mit steigender Anregefrequenz Ω die Werte der Amplitude im Bereich des Sprungphänomens andere sind als bei fallender Anregefrequenz. Abbildung 2.1 ist eine beispielhafte Darstellung. Hierbei wurde der Parameter-Satz laut Tabelle 2.1 für die Gleichung (2.22) gewählt.

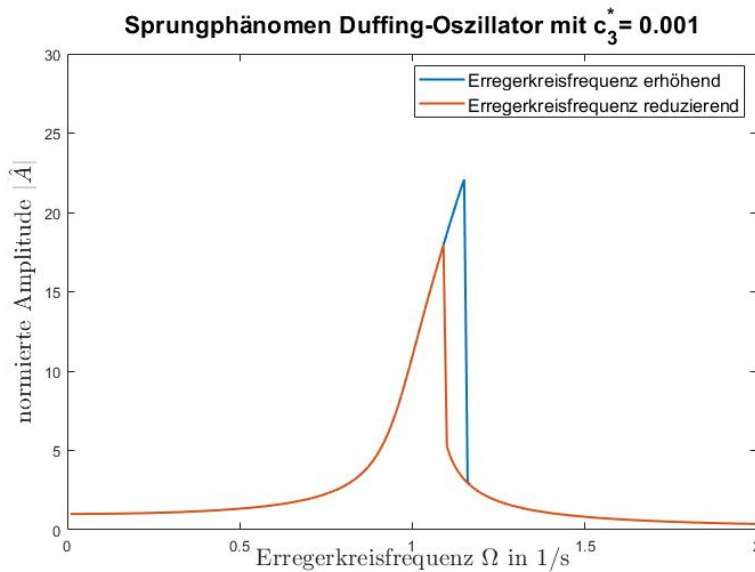


Abbildung 2.1: Sprungphänomen Duffing-Oszillator

Tabelle 2.1: Parameter-Satz Sprungphänomen Duffing-Oszillator

Parameter	Wert	Einheit
b^*	0.02	$\frac{N \cdot s}{m \cdot kg}$
c^*	1	$\frac{N}{m \cdot kg}$
c_3^*	0.001	$\frac{N}{m^3 \cdot kg}$
a^*	1	$\frac{m}{kg}$

2.5.2 Beispielsystem 2: Mathieusche Differentialgleichung

Die Mathieusche Differentialgleichung ist ein Beispiel für eine parametrisch erregte Schwingung in einem linearen System. Dabei wird die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cdot \cos(t)) \cdot x = 0 \quad (2.23)$$

durch einen zusätzlichen Cosinus-Term charakterisiert, der einer zeitlich veränderlichen Federsteifigkeit entspricht. Diese Gleichung wird häufig in der Literatur verwendet, dazu siehe [7], [6] und [1]. Es handelt sich um eine spezielle Form der Hillschen Differenzialgleichung. Hierbei werden auf eine Dämpfung und eine äußere Anregung verzichtet. Die Gleichung (2.23) ist somit durch die zwei Parameter α und β charakterisiert. Für jedes Wertepaar der beiden Parameter α und β kann bestimmt werden, ob der Fixpunkt $x = 0$, $\dot{x} = 0$ stabil oder instabil ist. In Abbildung 2.2 ist diese Information in einer Stabilitätskarte mit $\lambda = \alpha$ und $\gamma = \beta$ aufgetragen.

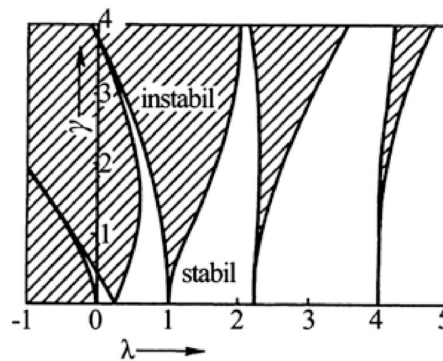


Abbildung 2.2: Stabilitätskarte für die Mathieusche Differentialgleichung [7]

3 Duffing-Oszillator

In diesem Abschnitt wird eine Sensitivitätsanalyse für den in Abschnitt 2.5.1 beschriebenen Duffing-Oszillator durchgeführt.

3.1 Modellierung des Duffing-Oszillator

Ausgegangen wird hierbei von einem nichtlinearen physikalischen System, welches durch eine erzwungene Schwingung $F(t)$ angeregt wird. Die äußere Anregung weist eine Zeitabhängigkeit auf. Das System lässt sich mit

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \quad (3.1)$$

beschreiben. Dabei stellt x die Zustandsgröße dar. $f(x, \dot{x})$ steht für eine allgemeine Funktion von x und \dot{x} . Die allgemeine Form des Duffing-Oszillators wurde bereits in Abschnitt 2.5.1 diskutiert. Ausgehend von Gleichung (2.22) erfolgt eine Reduktion der Differentialgleichung um eine Ordnung. Das Ergebnis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ a^* \cdot \sin(\omega \cdot t) - b^* \cdot x_2 - c^* \cdot x_1 - c_3^* \cdot x_1^3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

kann somit in *Matlab*® implementiert werden.

3.2 Vorbereitungen zur Sensitivitätsanalyse des Duffing-Oszillator

Zu Beginn der Berechnung der Sensitivitätsindizes muss der Zufallsgenerator konfiguriert werden, um vergleichbare Resultate zu erzielen. Dabei wird festgelegt, dass die Zufallszahlen mittels Mersenne-Twister erstellt werden. Dies ist ein Pseudo-Zufallszahlengenerator. Des Weiteren erfolgt die Festlegung des Seed auf hundert. Der Seed legt den Startwert für die Initialisierung des Pseudo-Zufallszahlengenerator fest und es kann eine Folge an Pseudozufallszahlen erzeugt werden. Dies dient für eine bessere Reproduzierbar-

keit der statistischen Eigenschaften der im weiteren Verlauf erzeugten Zufallszahlen. Zusätzlich wird die Erweiterung *UQLab* gestartet. Diese Schritte werden unabhängig vom anschließend beobachteten System ausgeführt.

Als nächster Schritt wird eine Frequenzbetrachtung des Duffing-Oszillators durchgeführt. Um den Einfluss des nichtlinearen Faktors der Differenzialgleichung (2.22)

$$\ddot{x} + b^* \cdot \dot{x} + c^* \cdot x + c_3^* \cdot x^3 = a^* \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

genauer zu untersuchen, werden die Parameter-Sätze nach Tabelle 3.1 gewählt. Der Parameter c_3^* wird im Bereich von $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ bis $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ variiert.

Tabelle 3.1: Parameter-Sätze des Duffing-Oszillators

Parameter	Wert	Einheit
b^*	0.02	$\frac{N \cdot s}{m \cdot kg}$
c^*	1	$\frac{N}{m \cdot kg}$
a^*	1	$\frac{m}{kg}$
c_3^*	0.001	$\frac{N}{m^3 \cdot kg}$
	0.02	
	0.1	
	0.25	
	0.5	

Als Solver wird das ode45-Lösungsverfahren verwendet. Dieses ist ein explizites Runge-Kutta-Verfahren (4,5) nach Dormand und Prince. Bei diesem Solver wird ein Einschrittverfahren verwendet. Das Verfahren berücksichtigt eine Schrittweitensteuerung [3]. Für den Differenzialgleichungslöser wird eine relative Fehlertoleranz von 10^{-5} und eine absolute Fehlertoleranz von 10^{-7} gewählt. Die erste Anfangsposition und die Anfangsgeschwindigkeit werden als Null definiert. Die Annahme des eingeschwungenen Zustandes ist dadurch gegeben, dass einhundert Schwingungen berechnet werden. Aus den jeweils letzten Schwingungen wird im Anschluss die maximale Amplitude ermittelt. Diese wird durch die Erregeramplitude normiert. Für die Frequenzbetrachtung wird die Erregerkreisfrequenz Ω variiert. Durch die Erhöhung beziehungsweise die Erniedrigung von Ω ergeben sich zwei Kurven, die das Sprungphänomen charakterisieren. Dabei legt immer der maximale Wert der letzten Schwingung aus der aktuellen Berechnung die Anfangsposition der nächsten Berechnung fest. Die Abbildung 3.1 zeigt die Frequenzbetrachtung mit dem ersten Parameter-Satz aus Tabelle 3.1 mit einem Parameter $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$.

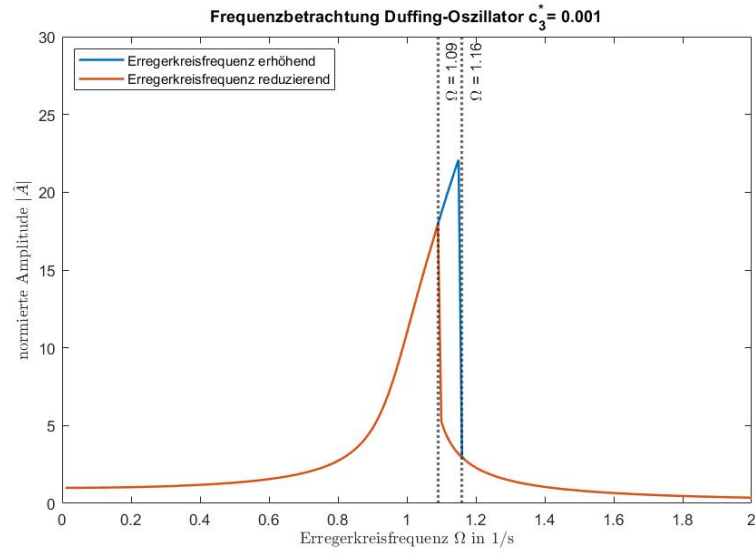


Abbildung 3.1: Frequenzbetrachtung Duffing-Oszillator mit $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

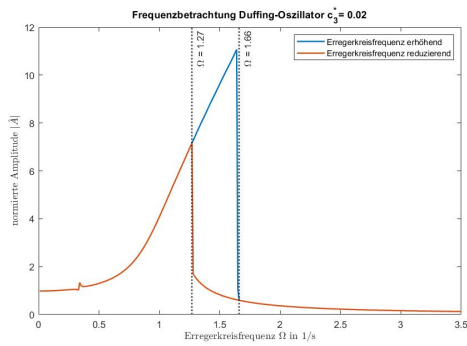
Das Resultat zeigt, dass das Sprungphänomen im Bereich zwischen $\Omega = 1.09s^{-1}$ und $\Omega = 1.16s^{-1}$ liegt. Diesem wird in weiterer Folge bei der Sensitivitätsanalyse ein gesondertes Augenmerk geschenkt.

Die Erregerkreisfrequenz, bei der das Sprungphänomen auftritt, ändert sich mit der Variation des Parameters c_3^* der Gleichung (2.22). Die Betrachtung dieser Sprungphänomene des Duffing-Oszillators erfolgt in Abbildung 3.2.

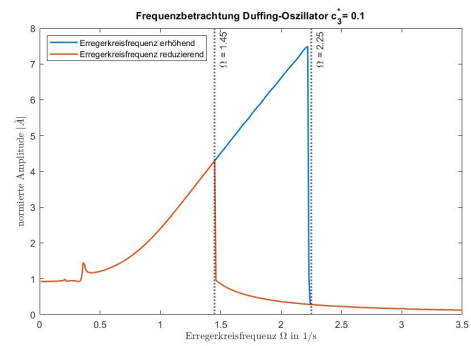
Der zu analysierende Frequenzbereich ist für alle Parameter c_3^* in Tabelle 3.2 aufgelistet.

Tabelle 3.2: Referenzen der Frequenzbetrachtung und der zu analysierende Bereich

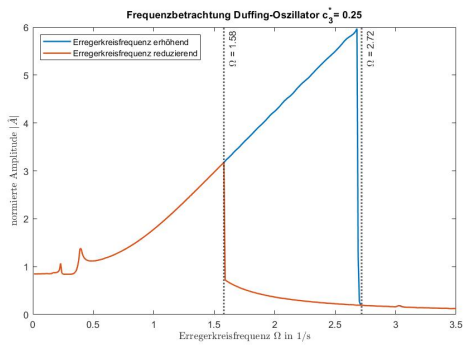
Abbildung	nichtlinearer Parameter c_3^*	Ω_{min}	Ω_{max}
3.2a	$0.02 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	$1.27s^{-1}$	$1.66s^{-1}$
3.2b	$0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	$1.45s^{-1}$	$2.25s^{-1}$
3.2c	$0.25 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	$1.58s^{-1}$	$2.72s^{-1}$
3.2d	$0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$	$1.71s^{-1}$	$3.16s^{-1}$



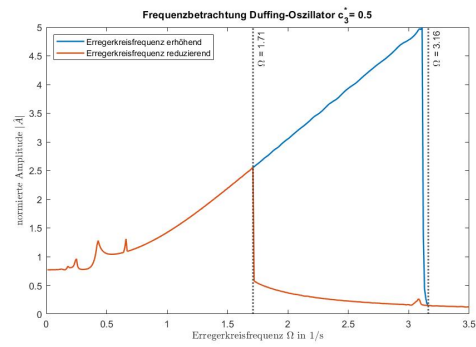
(a) Parameter $c_3^* = 0.02 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$



(b) Parameter $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$



(c) Parameter $c_3^* = 0.25 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$



(d) Parameter $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

Abbildung 3.2: Frequenzbetrachtung Duffing-Oszillator mit unterschiedlichen Parametern c_3^*

Als nächsten Schritt wird eine Zeitspanne festgelegt, in der die Betrachtung des Ausgangs erfolgt. Hierbei ist wichtig, dass der eingeschwungene Zustand des Systems innerhalb dieser Zeitspanne bereits erreicht wurde. Die Abbildung 3.3 zeigt die Amplitude des betrachteten Systems mit den Parametern aus Tabelle 3.1 und einen Parameter $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$. Dabei wird jene Erregerkreisfrequenz gewählt, bei der nach Abbildung 3.2d die maximale Amplitude auftritt. Der resultierende Schwingungsverlauf in Abbildung 3.3 kann ab zirka $t = 600$ Sekunden als eingeschwungener Zustand betrachtet werden.

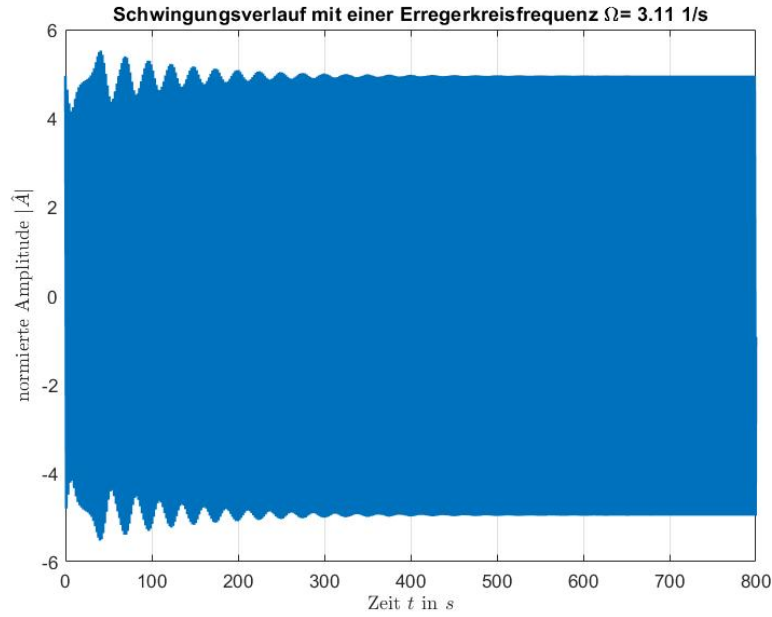


Abbildung 3.3: Amplitude des Duffing-Oszillators mit $\Omega = 3.11 s^{-1}$ und $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

Somit wird eine Zeitspanne mit einer Endzeit von $t_{ende} = 600$ Sekunden für die weitere Simulation gewählt. Die auftretende Schwingung des Duffing-Oszillators, welche in Abbildung 3.4 detailliert dargestellt ist, ist periodisch. Für eine korrekte Abbildung des Signals ist es erforderlich, Aliasing-Fehler zu vermeiden. Dabei muss nach dem Abtasttheorem die Abtastfrequenz größer als die doppelte Frequenz des ab zu tastenden Signals sein. Dies wird durch Festlegen auf zehn Berechnungspunkte pro Sekunde erreicht.

Im Anschluss erfolgt die Wahl der Verteilungen der Eingangsparameter. Bei dem betrachteten System handelt es sich um ein physikalisches Beispiel. Die Bauteile weisen in der Realität Fertigungstoleranzen auf, welche hierbei als Gaußverteilt angenommen werden. Die verwendeten Werte für die Parameter b^* , c^* und c_3^* werden in Tabelle 3.3 dargestellt.

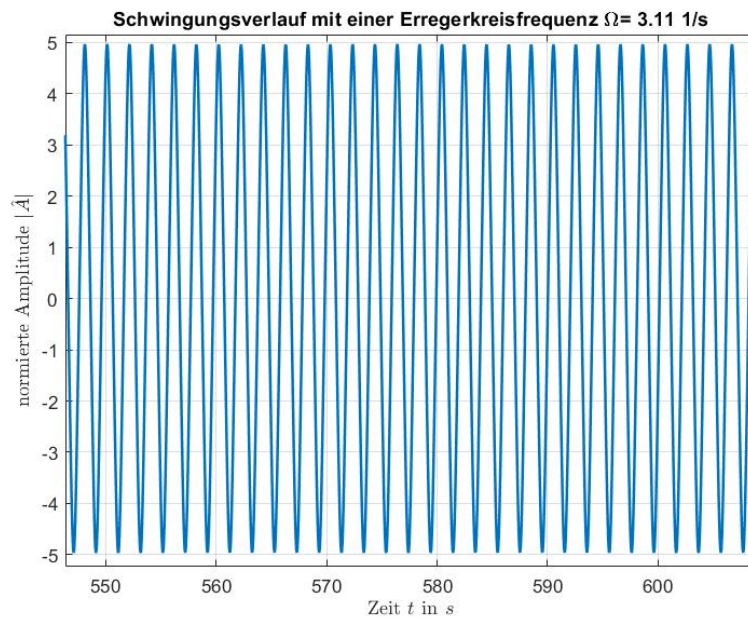


Abbildung 3.4: Ausschnitt des Ausgangs des Duffing-Oszillators mit $\Omega = 3.11s^{-1}$ und $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

Tabelle 3.3: Verteilung der Parameter des Duffing-Oszillators

Parameter	Mittelwert μ	Standardabweichung σ	Einheit
b^*	0.02	0.002	$\frac{N \cdot s}{m \cdot kg}$
c^*	1	0.1	$\frac{N}{m \cdot kg}$
c_3^*	0.001	0.0001	$\frac{N}{m^3 \cdot kg}$
	0.02	0.002	
	0.1	0.01	
	0.25	0.025	
	0.5	0.05	

3.3 Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators

Wie eingangs erwähnt, erfolgt die Berechnung der Sensitivitätsindizes mit zwei unterschiedlichen Methoden. Zum einen werden die Sensitivitätsindizes mittels numerisch sehr umfangreichen Monte-Carlo-Simulationen und zum anderen durch Bildung und Auswertung eines Metamodells berechnet. Ziel hierbei ist es, die Sensitivitätsindizes über die Erregerkreisfrequenzen in den Bereichen aus Abschnitt 3.2 darzustellen. Dabei wird die Erregerkreisfrequenz so verändert, dass mindestens dieser Bereich bei der Betrachtung der Indizes abgedeckt ist.

3.3.1 Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators mittels Monte-Carlo-Simulation

Für die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation wird zu Beginn das Differenzialgleichungssystem als *.m*-File als Simulationsparameter übergeben. Daraus wird im Anschluss das Simulationsmodell erstellt. Die Eingangsparameter b^* , c^* und c_3^* sind bereits im vorangegangenen Abschnitt beschrieben worden. Danach werden die Sobol' Indizes berechnet. Die gewählte Sample-Größe von fünfhundert ist verhältnismäßig gering, jedoch können bei dieser bereits qualitative Aussagen über das System und deren Indizes getätigt werden. Als nächster Schritt erfolgt die eigentliche Sensitivitätsanalyse, dabei werden die Sobol' Indizes entsprechend Gleichung (2.10) berechnet. Im Rahmen dieser Arbeit werden sich die weiteren Analysen nur auf die Totalen Sobol' Indizes beschränken, da diese bereits eine ausreichende Aussagekraft besitzen.

Die Bedeutung der einzelnen Parametern über die unterschiedlichen Erregerkreisfrequenzen soll mittels der Sobol' Indizes gezeigt werden. Ein Totaler Sobol' Index um eins zeigt eine sehr große Bedeutung des dazugehörigen Eingangsparameter für das System. Ist die Größe des Totalen Sobol' Index sehr klein oder sogar null, so ist die Bedeutung des dazugehörigen Eingangsparameters für das betrachtete System sehr gering. Um eine Darstellung der Sobol' Indizes über die unterschiedlichen Erregerkreisfrequenzen zu ermöglichen, ist vorerst eine zeitliche Betrachtung der Indizes, wie in Abbildung 3.5 dargestellt, nötig.

In Abbildung 3.5 werden die Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation für eine Erregerfrequenz $\Omega = 0.36s^{-1}$ und eines Parameters $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ berechnet. Um den Mittelwert am Ende des Ausgangsverlaufs berechnen zu können, wird ein Be-

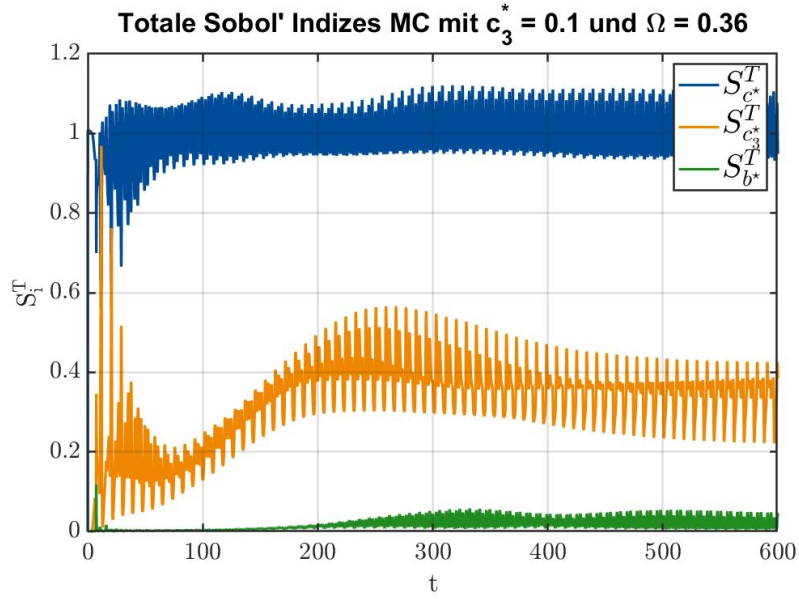


Abbildung 3.5: Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $\Omega = 0.36s^{-1}$ und $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

rechnungspunkt bestimmt, bei dem bereits ein eingeschwungener Zustand herrscht. So lässt sich dieser Punkt durch

$$nn = \text{round}\left(\frac{10 \cdot \pi}{\Omega_\mu}\right) \quad (3.3)$$

ermitteln. Der Wert wird gerundet, um eine ganze Zahl zu erhalten. Dabei sei angemerkt, dass von diesem Wert ausgehend der fortlaufende Mittelwert gebildet wird. Da der Wert für die Berechnungspunkte für fünf Perioden gerundet worden ist, wird nicht genau der Mittelwert erreicht. Das resultierende Signal beinhaltet noch immer eine kleine Schwingung. Um auch diese zu minimieren, wird nochmalig der Mittelwert über die letzten Schwingungen gebildet. Somit ist es möglich, den Mittelwert des angestrebten stationären Zustandes zu finden. Abschließend werden die resultierenden Totalen Sobol' Indizes über die Erregerkreisfrequenz dargestellt. Diese Abbildungen werden in Abschnitt 3.4 dargestellt und diskutiert.

3.3.2 Berechnung der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators mittels Polynomial Chaos Expansion

Bei der Berechnung mittels Polynomial Chaos Expansion ist zu Beginn die Erstellung eines Metamodells erforderlich. Dafür wird das Modell des ursprünglichen Systems, aus

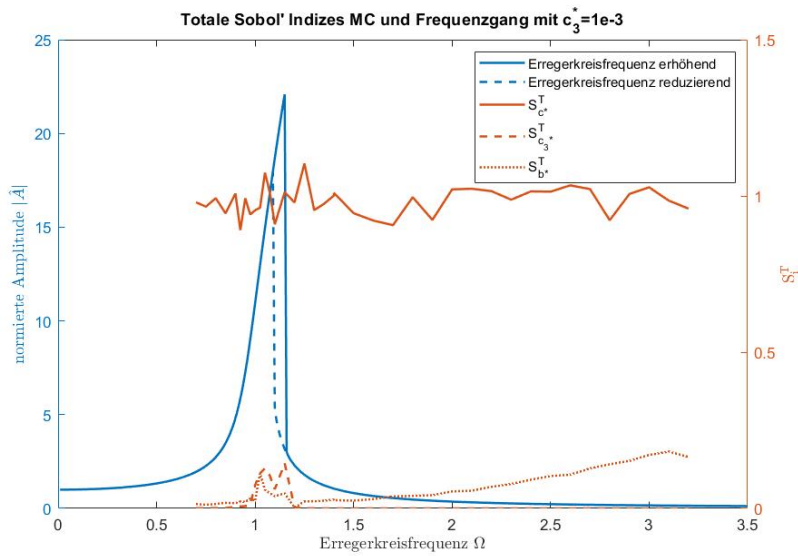
welchem das Metamodell entstehen soll, übergeben. Als Methode für die Erstellung des Metamodells wird die Least-Angle-Regression gewählt, welche in Abschnitt 2.4.2 beschrieben wird. Für diese Methode werden Einstellungen getroffen, um zum einen die q-Norm Adaptivität in einen Bereich von 0.5 bis 0.9 festgelegt zum anderen der maximale Polynomgrad auf 15 gesetzt. Die hier angegebenen Werte haben sich durch mehrfache Simulation des betrachteten Systems als sehr gut erwiesen. Die Anzahl der Samples für die Berechnung des Metamodells wurde auf fünftausend festgelegt. Werden zu wenige gewählt, so sind die Resultate nicht mehr aussagekräftig genug und es würden starke Sprünge oder andere numerische Fehler entstehen. Die Bestimmung der Samples erfolgt mittels Latin hypercube sampling. Dies ist eine statistische Methode, bei der ein Set aus fast-zufällige Zahlen für die festgelegten Parameter berechnet werden. Ausgehend von all diesen Einstellungen kann das Metamodell bestimmt werden und mit der Berechnung der Sobol' Indizes fortgesetzt werden. Somit können die zeitlichen Resultate der Sensitivitätsindizes wieder analysiert werden. Dazu erfolgt auch hier eine analoge Berechnung, wie in Abschnitt 3.3.1 dargestellt. So werden die Mittelwerte der Sensitivitätsindizes im eingeschwungenem Zustand gebildet. Diese können über die Erregerfrequenz dargestellt werden. Die Darstellung und Analyse der Resultate erfolgen in Abschnitt 3.4.

3.4 Analyse der Sensitivitäten des Duffing-Oszillators

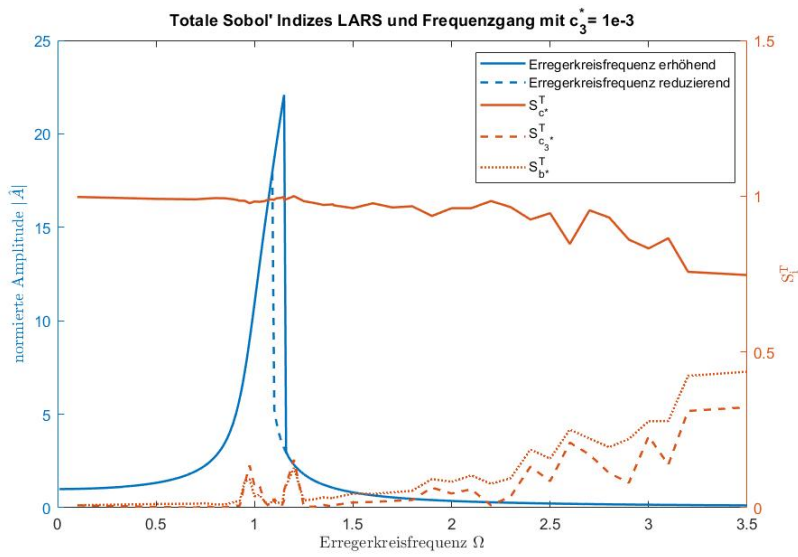
Dieser Abschnitt behandelt die Analyse der Sensitivitäten des Duffing-Oszillators. Die erforderlichen Einstellungen, die im Programm getroffen werden, wurden bereits im Abschnitt 3.2 dargestellt und die Sensitivitätsindizes in Abschnitt 3.3 berechnet. Hier erfolgt die Betrachtung der erhaltenen Resultate aus der vorangegangenen Berechnung. Dabei werden ersichtliche Eigenschaften des Systems und die Grenzen der Sensitivitätsanalyse diskutiert und interpretiert.

Das Resultat aus der Monte-Carlo-Simulation der Totalen Sobol' Indizes mit einem Parameter $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ ist in Abbildung 3.6a dargestellt. Als Vergleich ist das Ergebnis der Polynomial Chaos Expansion mit denselben Parametern mit Hilfe der Least-Angle-Regression in Abbildung 3.6b gezeigt.

Die Analyse zeigt, dass beide Resultate Ähnlichkeiten im Bereich des Sprungphänomens aufweisen. So sind die Größenordnungen der Sensitivitätsindizes über die Erregerkreisfrequenz für beide Berechnungsmethoden gleich. Der totale Sensitivitätsindizes $S_{c_3^*}^T$ schwankt knapp unter eins. Die beiden anderen Totalen Sobol' Indizes sind über fast alle Erregerkreisfrequenzen nahe bei null. Um das Sprungphänomen weisen diese jedoch zwei Maxima auf. So besitzt der Sensitivitätsindizes $S_{c_3^*}^T$ im Bereich des Sprungs beim Erhöhen der



(a) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 3.6: Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

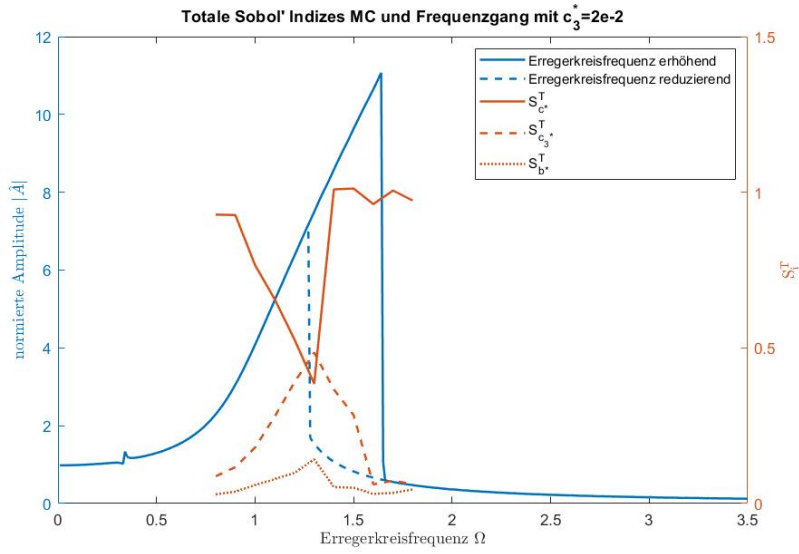
Erregerkreisfrequenz ein Maximum. Des Weiteren lässt sich bereits eine ungewollte numerische Eigenschaft der Least-Angle-Regression zeigen, denn es tritt eine numerische Drift mit höherer Erregerkreisfrequenz auf. Aufgrund der begrenzten Rechenleistung wurde auf eine umfangreichere Berechnung verzichtet. Die Schwankungen im Totalen Sobol' Index $S_{c^*}^T$ sind bei der Monte-Carlo-Simulation der geringen Anzahl von Samples geschuldet. Hierbei ist immer ein Abwägen des Nutzen über die Rechenzeit nötig. Mit mehr Rechenzeit können genauere Abschätzungen der Sensitivitätsindizes getroffen werden. Allerdings ist der Nutzen einer möglichst exakten Abbildung nicht bei allen Anwendungen gegeben. So kann es oftmals ausreichen eine qualitative Aussage zu erhalten, welcher Parameter wichtig ist. Gerade in diesem Fall ist eindeutig der Parameter c^* von großer Bedeutung. Die beiden anderen Parameter haben nur im Bereich des Sprungphänomens eine größere Bedeutung. Würde eine höhere Erregerkreisfrequenz von Interesse sein, so muss die Simulation entsprechend angepasst werden.

Das Ergebnis aus der Monte-Carlo-Simulation der Totalen Sobol' Indizes mit dem Wert für den Parameter $c_3^* = 0.02 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ ist in Abbildung 3.7a dargestellt.

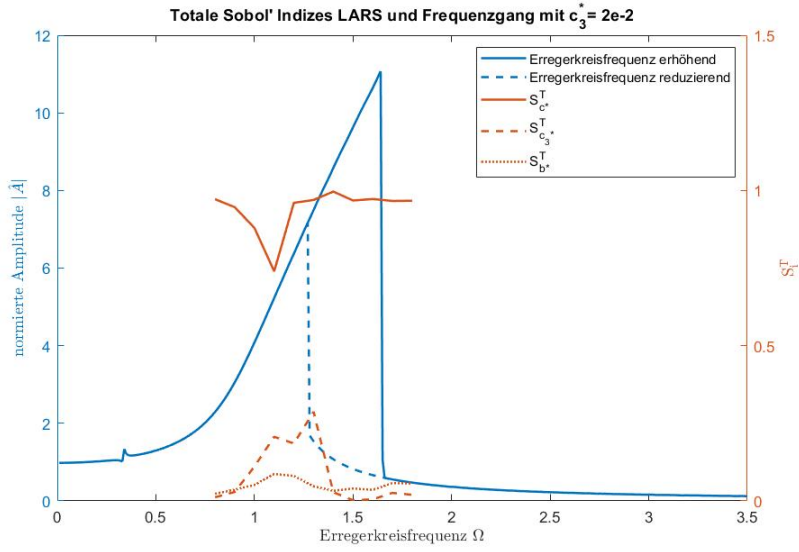
Als Vergleich ist das Resultat der Polynomial Chaos Expansion mit denselben Parameterwerten und der Least-Angle-Regression in Abbildung 3.7b gezeigt.

Bei diesen beiden Berechnungen ist wie bereits bei der Berechnung der Totalen Sobol' Indizes des Parameters $c_3^* = 0.001 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ die gleiche Größenordnung der Indizes vorhanden. So liegt der Totale Sobol' Indizes $S_{c^*}^T$ wieder knapp unter eins und die beiden anderen Parameter nur etwas über null. Bei diesen Berechnungen wurde nur der Bereich um das Sprungphänomen untersucht, da dieser für diese Arbeit von besonderem Interesse ist. Auf diese Weise zeigt sich bei diesem Parametersatz zum ersten Mal, dass bereits vor dem Sprung ein Ausschlag der Sensitivitätsindizes vorhanden ist. So reduziert sich jener Index für c^* und die beiden anderen gewinnen an Bedeutung. Bei diesem Parametersatz ist allerdings keine Veränderung der Indizes über den Sprung der normierten Amplitude bei Erhöhung der Erregerfrequenz feststellbar. Jedoch ist bei der Monte-Carlo-Simulation die Erhöhung des Sensitivitätsindizes $S_{b^*}^T$ beinahe bis zu der Erregerkreisfrequenz, bei der der Sprung durch Erhöhung der Erregerkreisfrequenz eintritt. Die beiden anderen Sensitivitätsindizes gehen wieder sehr schnell zu deren ursprünglichen Wert zurück.

Wird der Parameter c_3^* weiter erhöht, so prägen sich die zuvor genannten Phänomene immer weiter aus. Dies ist auch bei dem Ergebnis aus der Monte-Carlo-Simulation für die Totalen Sobol' Indizes mit einem Parameter $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ erkennbar, welches in Abbildung 3.8a dargestellt ist.



(a) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 3.7: Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.02 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

Als Vergleich dient wieder das Resultat der Polynomial Chaos Expansion mit denselben Parameterwerten und der Least-Angle-Regression, welches in Abbildung 3.8b gezeigt ist.

Hierbei sei angemerkt, dass der Totale Sobol' Indizes $S_{b^*}^T$ auch sehr rasch wieder seinen ursprünglichen Wert annimmt.

Das Ergebnis aus der Monte-Carlo-Simulation der Totalen Sobol' Indizes mit einem Parameter $c_3^* = 0.25 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ ist in Abbildung 3.9a dargestellt.

Als Vergleich ist das Resultat der Polynomial Chaos Expansion mit denselben Parameterwerten und der Least-Angle-Regression in Abbildung 3.9b gezeigt.

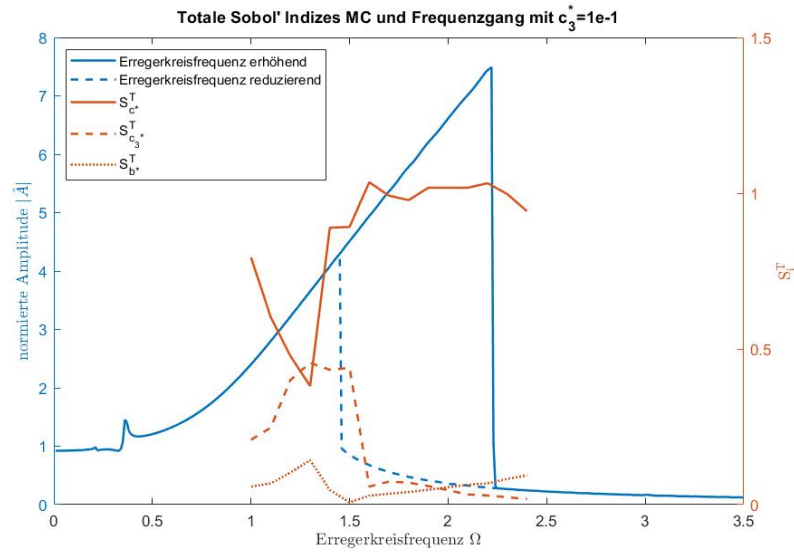
Auch bei diesem Parametersatz sind die auftretenden Phänomene noch stärker ausgeprägt. So ist der Totale Sobol' Indizes des Parameters c_3^* im Bereich des ersten Peaks deutlich größer als der Totale Sobol' Indizes des linearen Teils. Dies beruht auf dem bereits relativ großen Parameter c_3^* .

Ein noch größerer Parameter von $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$ führt zu dem Resultat der Monte-Carlo-Simulation der Totalen Sobol' Indizes, welches in Abbildung 3.10a dargestellt ist.

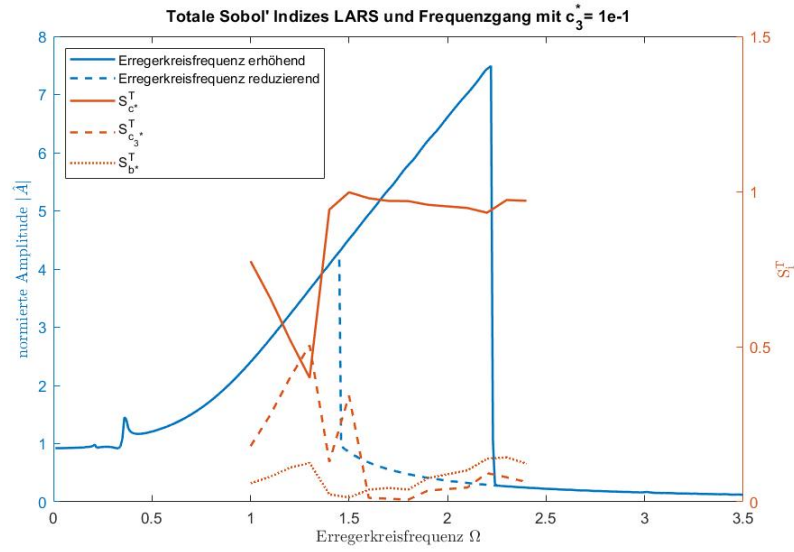
Die Monte-Carlo-Simulation kann hierbei noch sehr gut mit dem relativ großen Parameter c_3^* umgehen. Sie weist jedoch einen weiteren Peak bei dem Sprung der normierten Amplitude bei Erhöhung der Erregerkreisfrequenz auf. Dieses Maximum ist sowohl im Verlauf des Totalen Sobol' Indizes $S_{b^*}^T$ als auch im Verlauf von $S_{c_3^*}^T$ sichtbar. Als Vergleich dient das Resultat der Polynomial Chaos Expansion mit denselben Parameterwerten und der Least-Angle-Regression. Dies ist in Abbildung 3.10b gezeigt.

Dabei ist die Berechnung der Totalen Sobol' Indizes beim Sprung der erhöhenden Erregerkreisfrequenz numerisch mit den gewählten Eigenschaften nicht möglich. In diesem Bereich tritt eine numerische Instabilität auf. Somit wurde mit dieser Berechnungsmethode mit den gewählten Parameterwerten eine Grenze des Möglichen überschritten. Die berechneten Werte in der Nähe dieser Frequenz sind mit Vorsicht zu genießen. Des Weiteren ist die Bedeutung des Parameters c_3^* bei der Berechnung mittels Least-Angle-Regression bereits vor dem Sprung der erniedrigenden Erregerkreisfrequenz wesentlich größer als die Bedeutung der anderen Parameter.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch den größer werdenden Totalen Sobol' Index sich das Sprungphänomen ankündigen kann und somit die Indizes die charakteristischen Eigenschaften des Systems widerspiegeln. Damit ist es möglich, solche Systeme mittels Totalen Sobol' Indizes zu untersuchen und jene Bereiche zu finden, welche in der Praxis vermieden werden sollen, um einen kritischen Zustand zu vermeiden.

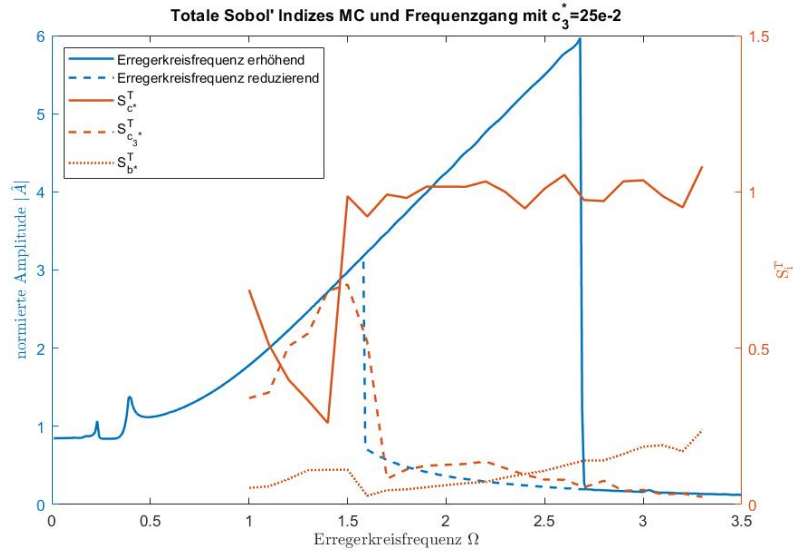


(a) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation

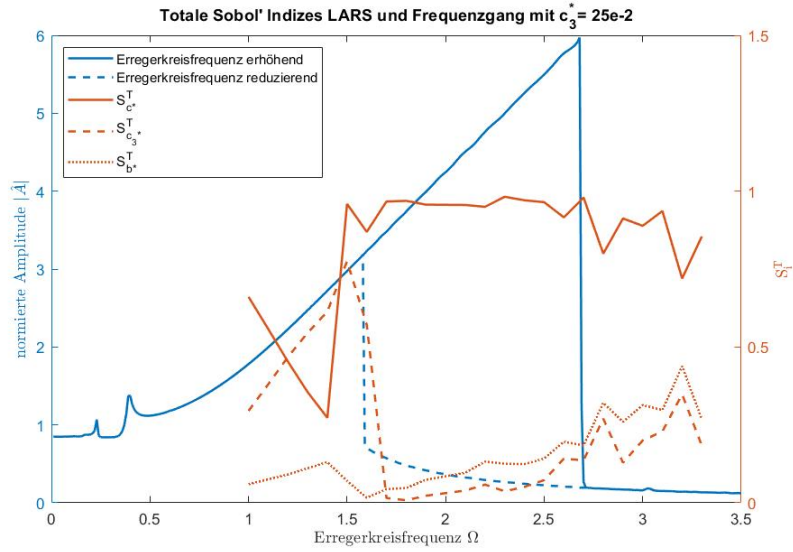


(b) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 3.8: Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.1 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

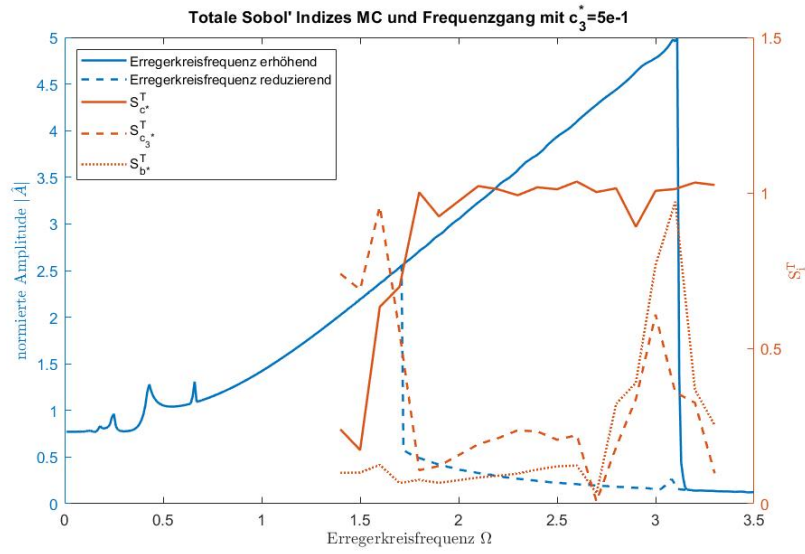


(a) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation

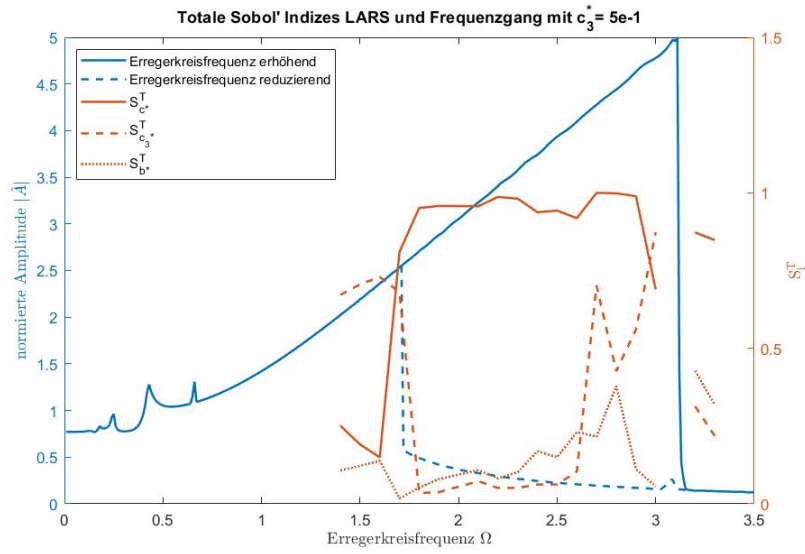


(b) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 3.9: Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.25 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$



(a) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 3.10: Totale Sobol' Indizes des Duffing-Oszillators mit $c_3^* = 0.5 \frac{N}{m^3 \cdot kg}$

3.5 Vergleich des Rechenaufwandes der Sensitivitätsindizes des Duffing-Oszillators

Abschließend sei in Tabelle 3.4 ein Vergleich der benötigten Rechenzeit mit den gewählten Simulationsparameter aus Abschnitt 3.3.2 dargestellt. Diese Daten basieren auf der Berechnung auf demselben Computer und sind daher gut vergleichbar. Daraus ist ersichtlich, dass die gesamte Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation in Summe für das Beispielsystem Duffing-Oszillator schneller ist. Die Erstellung des Metamodells ist mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Erfolgt die Berechnung der Sobol' Indizes aus diesem Metamodell ist diese Berechnung binnen Sekunden erledigt und somit deutlich schneller als die Berechnung der Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation. Abschließend lässt sich sagen, dass für dieses Beispiel die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation vorteilhaft ist. Werden jedoch mehrere Berechnungen von einem Metamodell gewünscht oder wurde das Metamodell bereits berechnet, so ist die Polynomial Chaos Expansion für dieses Beispiel von Vorteil.

Tabelle 3.4: Rechenaufwand Duffing-Oszillator

Methode	benötigte Zeit
<i>Monte-Carlo-Simulation:</i>	
Berechnung der Sobol' Indizes	ca. 7 Minuten
<i>Polynomial Chaos Expansion:</i>	
Erstellung des Metamodells	ca. 513 Minuten
Berechnung der Sobol' Indizes	ca. 2 Sekunden

4 Mathieusche Differentialgleichung

In diesem Kapitel wird die in Abschnitt 2.5.2 beschriebene Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung verwendet, um eine Sensitivitätsanalyse an einem inversen Pendel durchzuführen.

4.1 Modellierung der Mathieusche Differentialgleichung

Ein physikalisches Beispiel für die Mathieusche Differentialgleichung ist das inverse Pendel.

Das invertierte Pendel ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

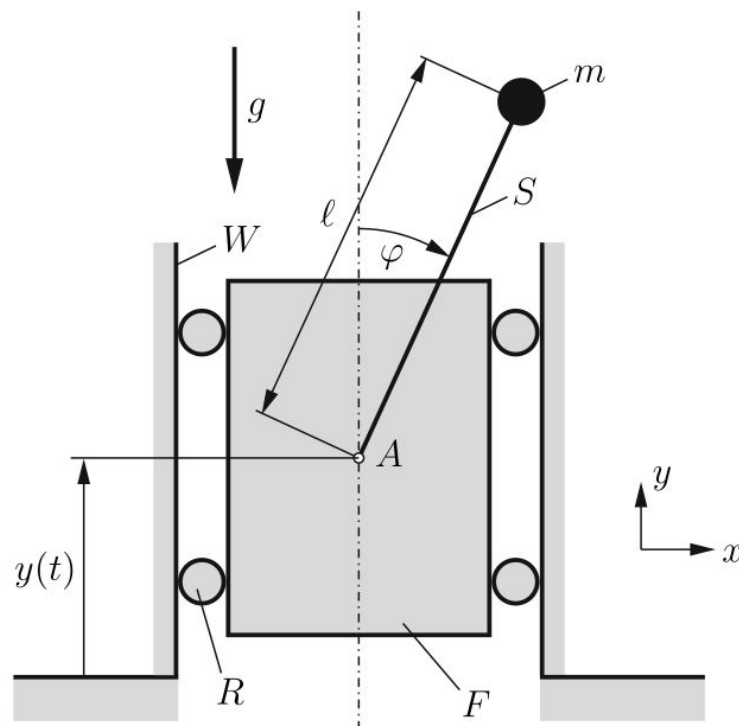


Abbildung 4.1: Invertiertes Pendel mit Fußpunktanregung

Dabei wird eine Punktmasse m angenommen, die an einer masselosen Stange S befestigt ist. Die Stange ist im Punkt A mit dem Führungsschlitten F verbunden. Dieser kann durch vier Rollen R reibungsfrei an der Wand W gleiten. Der Führungsschlitten wird mit

$$y(t) = -y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4.1)$$

angeregt. Dabei ist y_0 die Anfangsauslenkung des Führungsschlittens.

Der Drallsatz in φ -Richtung liefert

$$\Theta_{zz}^{(A)} \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot \ell \cdot \sin(\varphi) \cdot \ddot{y}_A = \ell \cdot \sin(\varphi) \cdot m \cdot g. \quad (4.2)$$

Dabei wird das Trägheitsmoment der Punktmasse m bezüglich A durch

$$\Theta_{zz}^{(A)} = m \cdot \ell^2 \quad (4.3)$$

definiert.

Dies eingesetzt liefert die Gleichung

$$m \cdot \ell^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot \ell \cdot \sin(\varphi) \cdot \ddot{y}_A = \ell \cdot \sin(\varphi) \cdot m \cdot g. \quad (4.4)$$

Anschließend wird durch die Masse m und ℓ^2 gekürzt und alle Terme auf eine Seite gebracht. Das Ergebnis ist

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\ddot{y}_A - g}{\ell} \right) \cdot \sin(\varphi) = 0. \quad (4.5)$$

Die Führungsschlittenbeschleunigung \ddot{y}_A wird eingesetzt und es folgt die Annahme, dass nur kleine Bewegungen um $\varphi = 0$ auftreten, sodass der Sinus-Term linearisiert werden kann. Des Weiteren wird die Erregerkreisfrequenz $\omega = 1s^{-2}$ gesetzt. Somit folgt die Beschreibung des Systems durch

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{y_0 \cdot \cos(t)}{\ell} - \frac{g}{\ell} \right) \cdot \varphi = 0. \quad (4.6)$$

Werden die beiden Parameter

$$\alpha = -\frac{g}{\ell} \quad (4.7)$$

und

$$\beta = \frac{y_0}{\ell} \quad (4.8)$$

in Gleichung 4.6 eingesetzt, folgt

$$\ddot{\varphi} + (\alpha + \beta \cdot \cos(t)) \cdot \varphi = 0. \quad (4.9)$$

Die Gleichung 4.10 ist bekannt als die Mathieusche Differentialgleichung und kann allgemein als

$$\ddot{\varphi} + f(t) \cdot \varphi = 0. \quad (4.10)$$

dargestellt werden.

Um eine Implementierung in das Computerprogramm zu ermöglichen, wird die Gleichung 4.10 in ein lineares Differenzialgleichungssystem von Ordnung eins gebracht und ergibt die Form

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cdot \cos(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

und kann in *Matlab*® implementiert werden.

4.2 Vorbereitungen zur Sensitivitätsanalyse der Mathieuschen Differentialgleichung

In diesem Abschnitt erfolgen wie in Abschnitt 3.2 alle Vorbereitungen für die Berechnung der einzelnen Sensitivitätsindizes. Dabei werden die getroffenen Einstellungen für die Berechnung dargestellt und deren Bedeutung erläutert.

Zu Beginn der Berechnung muss der Zufallsgenerator konfiguriert werden, um vergleichbare Resultate zu erzielen. Dabei werden wie bei dem Duffing-Oszillator die Zufallszahlen mittels Mersenne-Twister erstellt. Alle Einstellungen des Zufallszahlengenerators bleiben dieselben. Im Anschluss wird die Erweiterung *UQLab* gestartet.

Als nächster Schritt erfolgt die Festlegung der beobachteten Zeitspanne der Sensitivitätsindizes. Hierbei erfolgt die Wahl auf eine Zeitspanne, die von null bis vierzigmal π läuft. Durch die Wahl der Endzeit wird erreicht, dass die spätere Berechnung eines wandernden Mittelwertes bessere Ergebnisse liefert. Die Aufteilung des Zeitintervalls erfolgt in eintausend Schritte.

Für die Wahl der Parameter wird als erstes eine Stabilitätskarte der Parameter α und β erstellt. Diese zeigt, bei welchen Parameterkombinationen ein stabiles Verhalten des Systems zu erwarten ist und somit eine Anwendung der Sensitivitätsanalyse sinnvoll ist. Die berechnete Stabilitätskarte ist in Abbildung 4.2 für $\alpha = -1.8, \dots, 0$ und $\beta = 0, \dots, 3$ dargestellt.

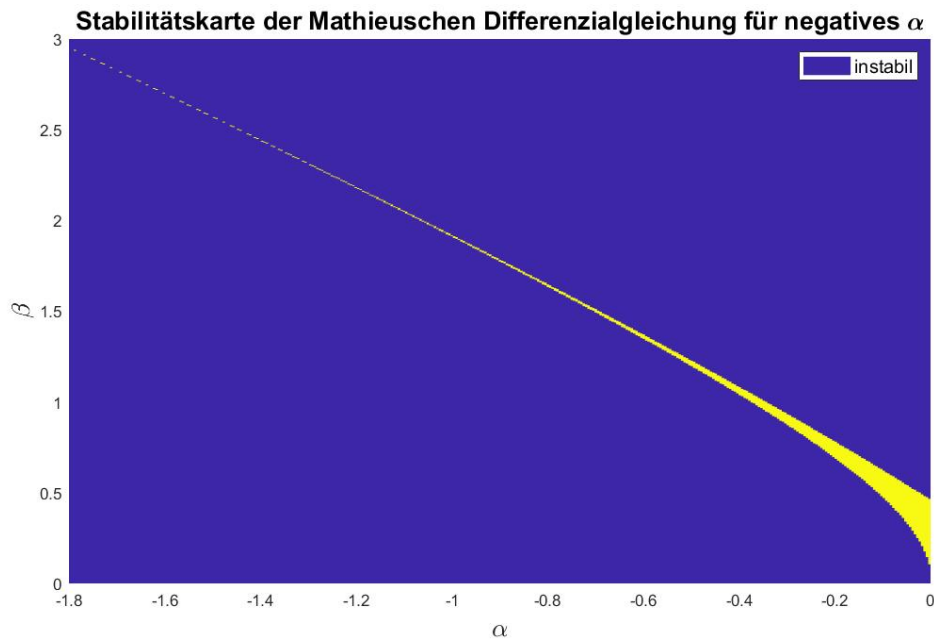


Abbildung 4.2: Stabilitätskarte der Mathieschen Differenzialgleichung mit negativen α
- gelb zeigt stabilen Bereich an

Dabei kennzeichnen die hellen Bereiche das stabile Gebiet, während die dunklen Bereiche instabile Gebiete darstellen. Das Kriterium für ein stabiles System wurde durch die Anfangsauslenkung definiert. So ist eine Systemantwort instabil, welche eine größere Schwingung als die Anfangsauslenkung aufweist. Ein stabiles System wird somit nur erreicht, wenn die Amplitude der Systemantwort abnimmt oder zumindest gleich bleibt. Physikalisch bedeutet dies, dass bei dem inversen Pendel keine Vergrößerung der maximalen Auslenkung erfolgt. Bei dem hier berechneten System wird eine Anfangsauslenkung von $\varphi_0 = 0.1 \text{ rad}$ gewählt. Es ist ersichtlich, dass der Bereich des stabilen Verhaltens sehr klein ist und somit die gewählten Parameter nur kleine Schwankungen aufweisen dürfen.

Aus dieser Stabilitätskarte kann der Parametersatz für das zu untersuchende System bestimmt werden. Dieser wird so gewählt, dass alle Parameterpaare im stabilen Bereich liegen, um für das System eine stabile Antwort zu erhalten. Die Wahl für die beiden Parameterbereiche von drei Parametersätzen ist in Tabelle 4.1 dargestellt.

Tabelle 4.1: Parameters der Mathieschen Differenzialgleichung

Parametersatz	Parameter	minimaler Wert	maximaler Wert	Einheit
1	α	-0.035	-0.01	$\frac{1}{s^2}$
1	β	0.34	0.44	-
2	α	-0.11	-0.091	$\frac{1}{s^2}$
2	β	0.495	0.603	-
3	α	-0.547	-0.541	$\frac{1}{s^2}$
3	β	1.264	1.281	-

Hierbei wird angenommen, dass die beiden Parameter zwischen ihren Grenzen gleichverteilt sind. Dies ist eine allgemeine Annahme, welche darauf basiert, dass die Konstruktion des inversen Pendels durch Fertigungstoleranzen gleichverteilte Größen für die beiden Parameter α und β liefert.

In Abbildung 4.3, Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 ist der jeweilige Ausschnitt der einzelnen Parametersätze dargestellt. Die gleichbleibende Farbe über den gesamten Bereich bedeutet, dass alle berechneten Systemantworten in diesem Parameterbereichen stabiles Verhalten aufweisen. Diese Validierung sorgt dafür, dass bei der Berechnung der Sensitivitätsanalyse keine Fehler aufgrund der Instabilität des Systems auftreten.

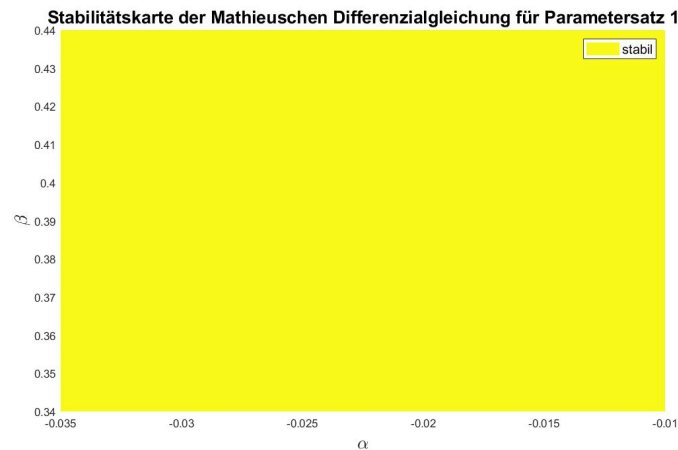


Abbildung 4.3: Stabilitätskarte der Mathieschen Differenzialgleichung für Parametersatz 1 - gelb zeigt stabilen Bereich an

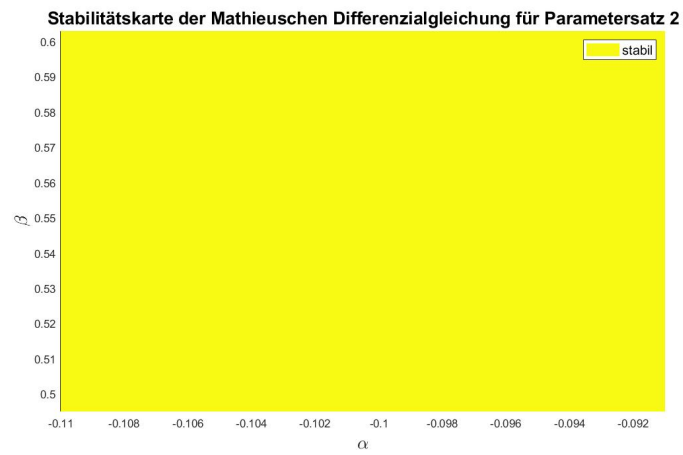


Abbildung 4.4: Stabilitätskarte der Mathieschen Differentialgleichung für Parametersatz 2 - gelb zeigt stabilen Bereich an

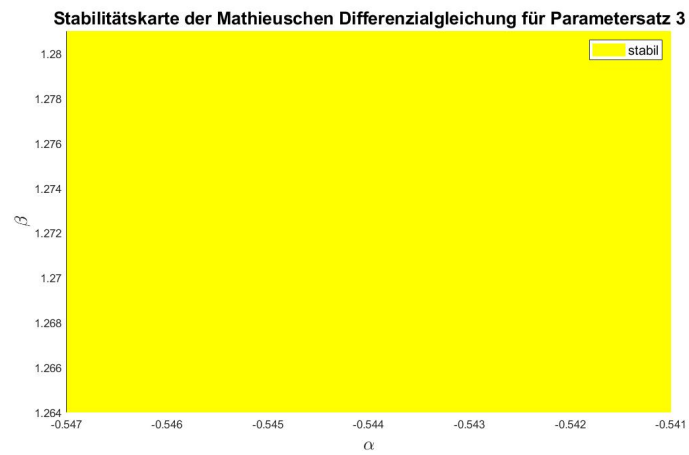


Abbildung 4.5: Stabilitätskarte der Mathieschen Differentialgleichung für Parametersatz 3 - gelb zeigt stabilen Bereich an

4.3 Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieusche Differentialgleichung

Die Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differentialgleichung erfolgt mit zwei unterschiedlichen Methoden. Zum einen werden die Sensitivitätsindizes mittels Monte-Carlo-Simulation und zum anderen durch Bildung eines Metamodells berechnet. Ziel hierbei ist es, die Sensitivitätsindizes über die Zeit darzustellen. Dabei werden die Werte der Parameter des inversen Pendels durch die in Tabelle 4.1 bestimmten Parametersätze definiert.

4.3.1 Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differentialgleichung mittels Monte-Carlo-Simulation

Am Beginn der Berechnung der Sensitivitätsindizes mit der Monte-Carlo-Simulation wird das Differenzialgleichungssystem *.m*-File als Simulationsparameter übergeben. Aus diesem wird das Modell der Mathieuschen Differentialgleichung erstellt. Die Eingangsparmeter wurden bereits im Abschnitt 4.2 definiert. Es erfolgt die Festlegung, dass Sobol' Indizes berechnet werden. Die Samplegröße wird hierbei auf fünftausend festgelegt. Im Anschluss erfolgt die Berechnung aller Sobol' Indizes. Bei der weiteren Analyse werden wieder nur die Totalen Sobol' Indizes betrachtet. Da bei diesem System ein zeitlicher Verlauf der Sobol' Indizes von Interesse ist, erfolgt als nächster Schritt die Analyse. Die Darstellung der Resultate der Berechnung in einem zeitlichen Verlauf erfolgt in Abschnitt 4.4. Des Weiteren werden dort die Ergebnisse analysiert und diskutiert.

4.3.2 Berechnung der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differentialgleichung mittels Polynomial Chaos Expansion

Bei der Berechnung der Sensitivitätsindizes mittels Polynomial Chaos Expansion erfolgt die Erstellung des benötigten Metamodells mittels einer Input-Output-Berechnung. Dafür werden aus den zuvor definierten Eingangsvariablen mit deren Verteilung zweitausend Samples der Zufallsvariablen mit Hilfe des Latin Hypercube Sampling erstellt. Mit Hilfe dieser Parameterpaare werden die Zeitverläufe des Systemausgangs berechnet. Die dabei generierten Werte werden dem Metamodell als Simulationseigenschaft übergeben. Als Methode zur Metamodellerstellung wird die Least-Angle-Regression gewählt. Die Einstellungen für diese Methode beschränken sich hierbei auf den maximalen Polynomgrad. Dieser wird bei diesem System als variabler Bereich zwischen Grad fünf und Grad 35 definiert. Mit diesen gesetzten Einstellungen kann im Anschluss das Metamodell berechnet werden. Ein gutes Maß zur Evaluierung des Metamodells ist die Betrachtung des

„leave-one-out“ Fehlers. Bei den gewählten Eigenschaften wurde ein maximaler Fehler von circa $3.7 \cdot 10^{-8}$ erreicht. Ausgehend von diesem geringen geschätzten Fehler, lässt sich sagen, dass das Metamodell sehr gut das Modell abbilden kann.

Ausgehend von dem erstellten Metamodell können in weiterer Folge die Sobol' Indizes erstellt werden. Für diese Berechnung sind keine weiteren Einstellungen zu treffen. Die Berechnung dieser nimmt durch das zuvor erstellte Metamodell nur einen Bruchteil der Berechnung der Sensitivitätsindizes mittels Monte-Carlo-Simulation in Anspruch. Hierbei ist somit der große Vorteil der Berechnung mittels Metamodell ersichtlich. Die Darstellung und Analyse der Resultate aus der Berechnung erfolgt im nachfolgenden Abschnitt.

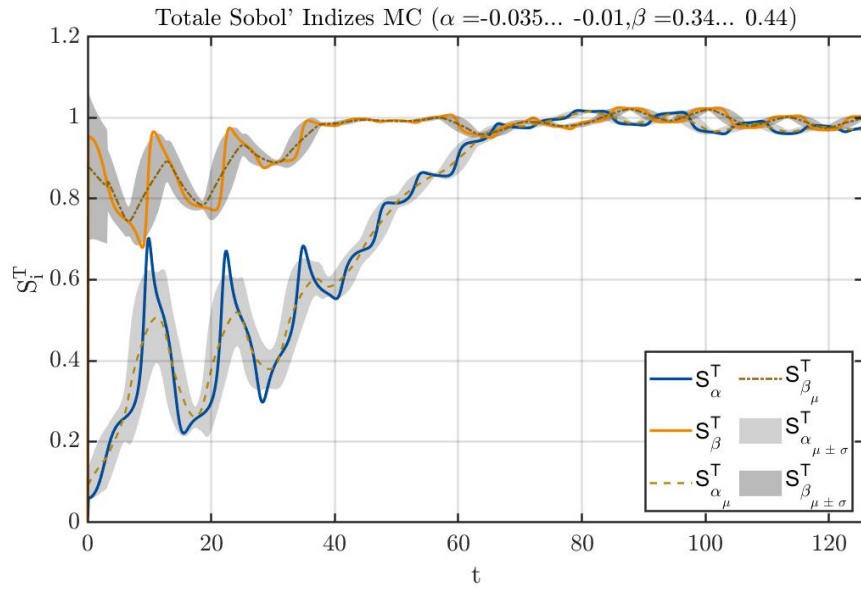
4.4 Analyse der Sensitivitäten der Mathieuschen Differentialgleichung

Dieser Abschnitt behandelt die Analyse der Sensitivitäten der Mathieuschen Differentialgleichung. Die erforderlichen Einstellungen für die Berechnung wurden bereits im Abschnitt 4.2 dargestellt und die Sensitivitätsindizes in Abschnitt 4.3 berechnet. Hier werden die erhaltenen Resultate aus der vorangegangenen Berechnung betrachtet. So werden die ersichtlichen Eigenschaften der Mathieusche Differentialgleichung aus der Sensitivitätsanalyse diskutiert und interpretiert.

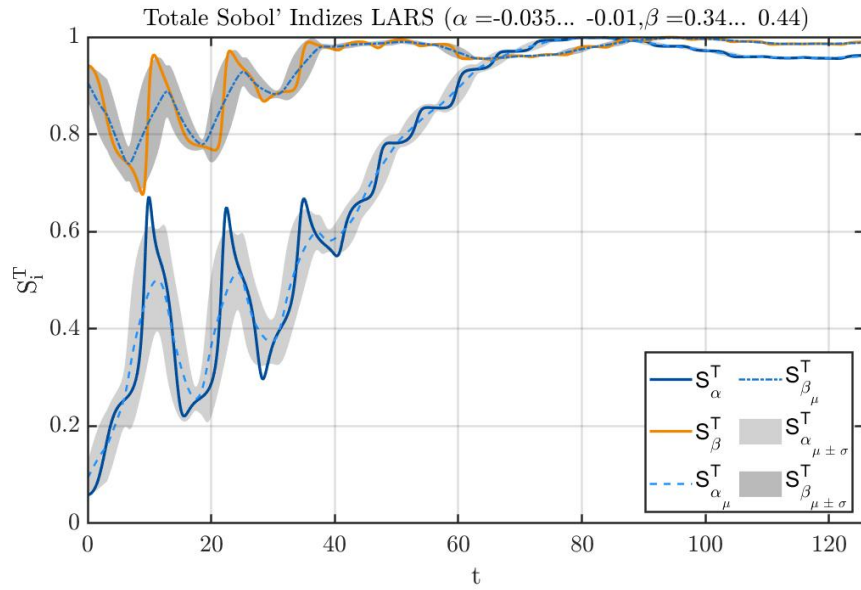
Die Resultate für den Parametersatz 1 sind aus der Sensitivitätsanalyse mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation in Abbildung 4.6a ersichtlich.

Hierbei ist zu erkennen, dass beide Parameter, also sowohl α als auch β , eine entscheidende Rolle spielen. Dies lässt sich anhand der Fluktuation um den Wert eins ab zirka 65 Sekunden sagen. Die in den Verläufen noch vorhandene Schwingung lässt sich auf den vorhandenen Cosinus-Term der Mathieuschen Differentialgleichung zurückführen. Des Weiteren sei festzuhalten, dass sowohl der wandernde Mittelwert als auch eine ebenso wandernde Standardabweichung berechnet und dargestellt werden. Durch diese zusätzliche Berechnung werden den auftretenden Spitzenwerten und dem Schwingungsanteil des Verlaufs weniger Beachtung geschenkt und ein glatterer Verlauf der Sensitivitäten erzeugt.

Die Abbildung 4.6b zeigt das Ergebnis aus der Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion.



(a) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 4.6: Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 1

Dabei fällt auf, dass auch hier die Totalen Sobol' Indizes für beide Parameter den Wert eins anstreben. Außerdem werden wiederum die Mittelwerte sowie die Standardabweichung dargestellt. Als Eigenschaft der Least-Angle-Regression ist zu sehen, dass kein Wert größer als eins wird, wohingegen bei der Monte-Carlo-Simulation durchaus Werte auftreten, welche größer als eins sind. Um die Verläufe der Totalen Sobol' Indizes aus den unterschiedlichen Berechnungsmethoden besser vergleichbar zu machen, wird ein direkter Vergleich der Mittelwerte in Abbildung 4.7 dargestellt.

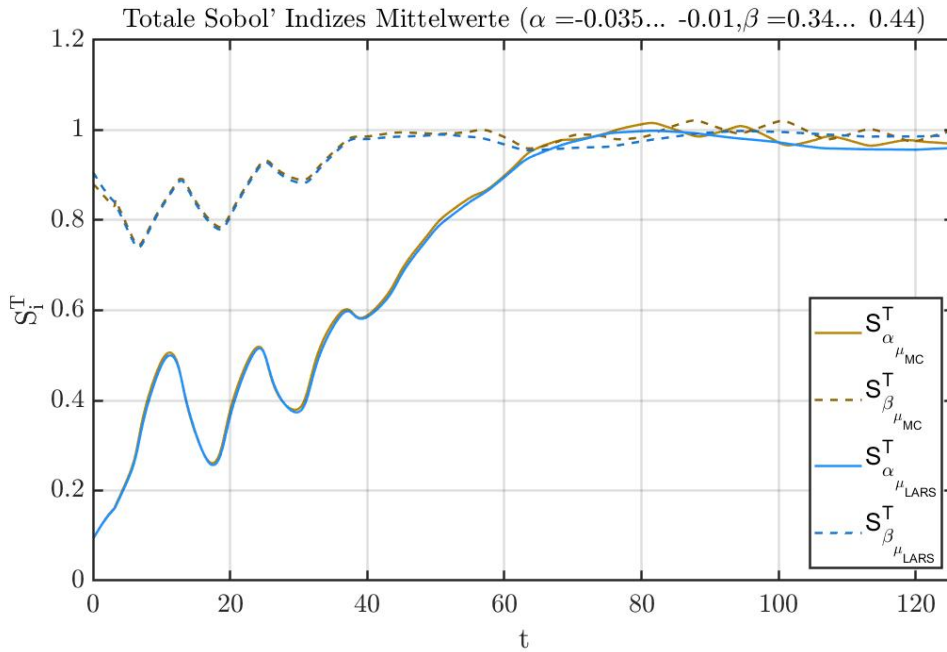
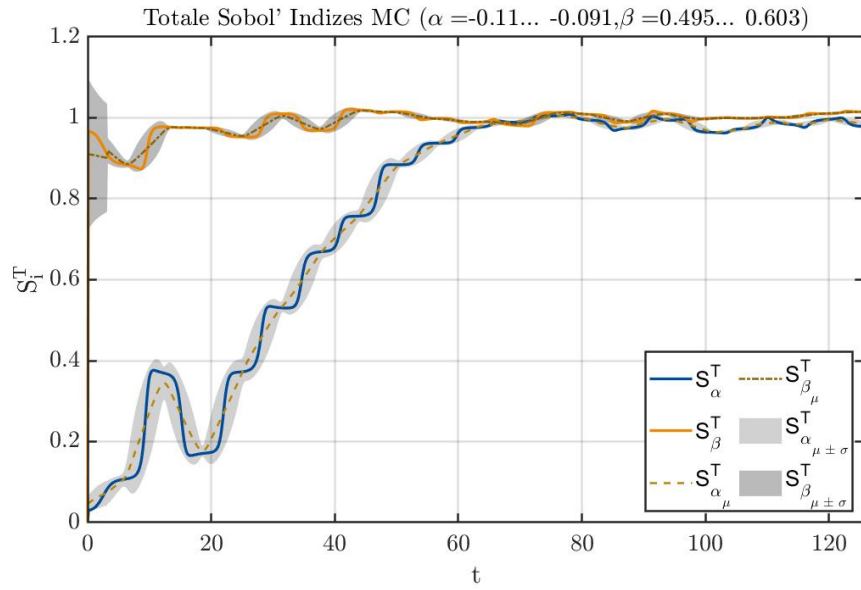


Abbildung 4.7: Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 1 aus den beiden Berechnungsmethoden

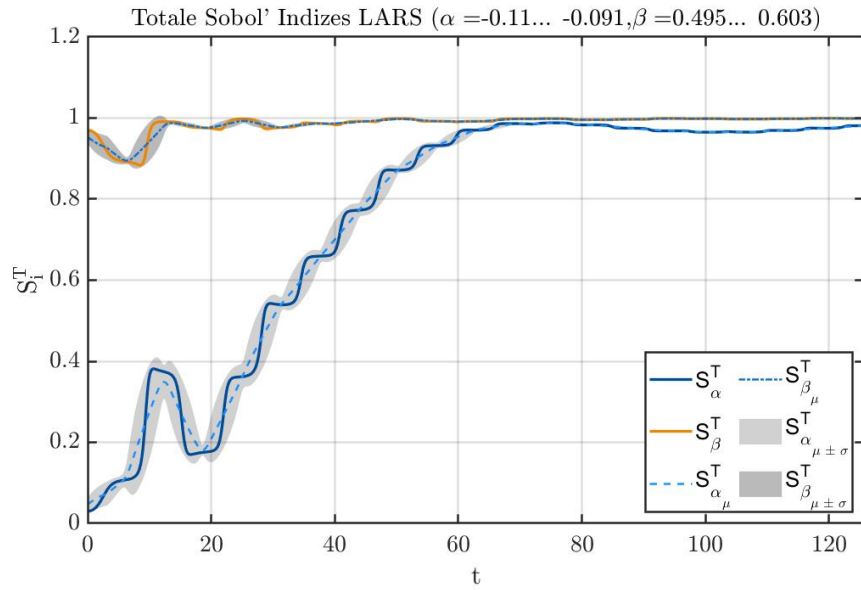
Die zeitlichen Verläufe zeigen eine gute Übereinstimmung und es lässt sich sagen, dass beide Berechnungen zufriedenstellende Ergebnisse liefern.

Die Ergebnisse des zweiten Parametersatzes werden in Abbildung 4.8a dargestellt. Dabei erfolgte die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation.

Die Totalen Sobol' Indizes beider Parameter streben wie bereits beim ersten Parametersatz den Wert eins an. Um diesen Wert fluktuieren sie ab zirka 65 Sekunden. Des Weiteren sind der jeweilige Mittelwert und die jeweilige Standardabweichung dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Ausschläge am Anfang des zeitlichen Signals geringer sind als bei dem Parametersatz 1. Die Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion ist in Abbildung 4.8b dargestellt.



(a) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 4.8: Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2

Auch in diesem Verlauf ist der geringere Ausschlag im Einschwingvorgang ersichtlich. Außerdem streben auch hier beide Indizes den Wert eins an. Wobei der Totale Sobol' Indizes S_β^T über den gesamten Verlauf immer eine größere Bedeutung als der Totale Sobol' Indizes S_α^T hat. Dies lässt sich durch die unterschiedliche Größenordnung der beiden Wertepaare erklären. β ist bei diesem Parametersatz um einen absoluten Faktor fünf bis sechs größer als α .

Einen Vergleich der beiden zeitlichen Berechnungsmethoden liefert Abbildung 4.9.

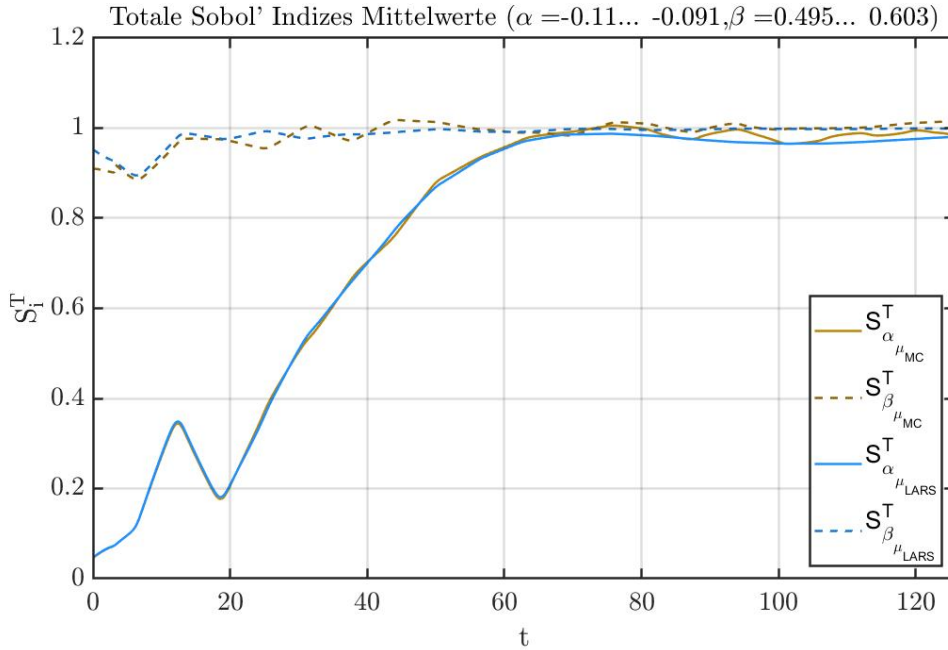
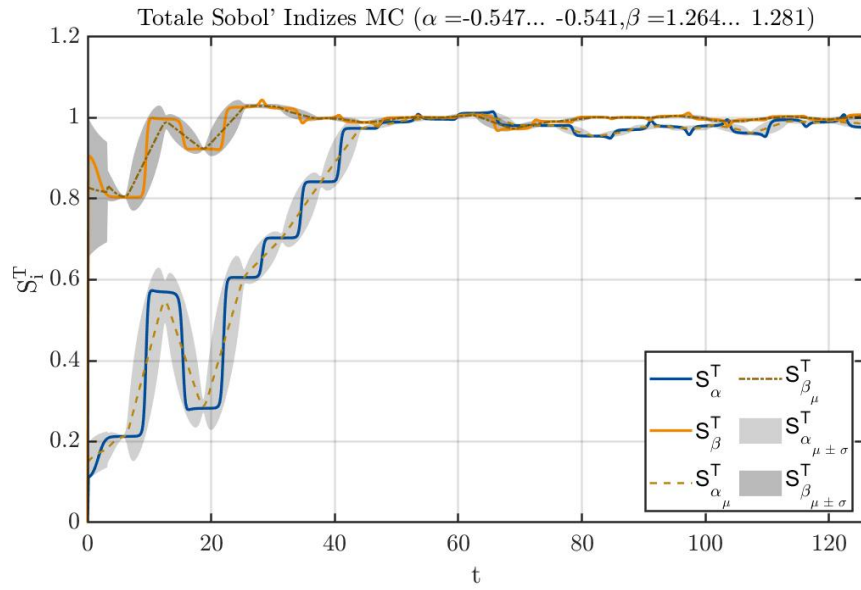


Abbildung 4.9: Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2 aus den beiden Berechnungsmethoden

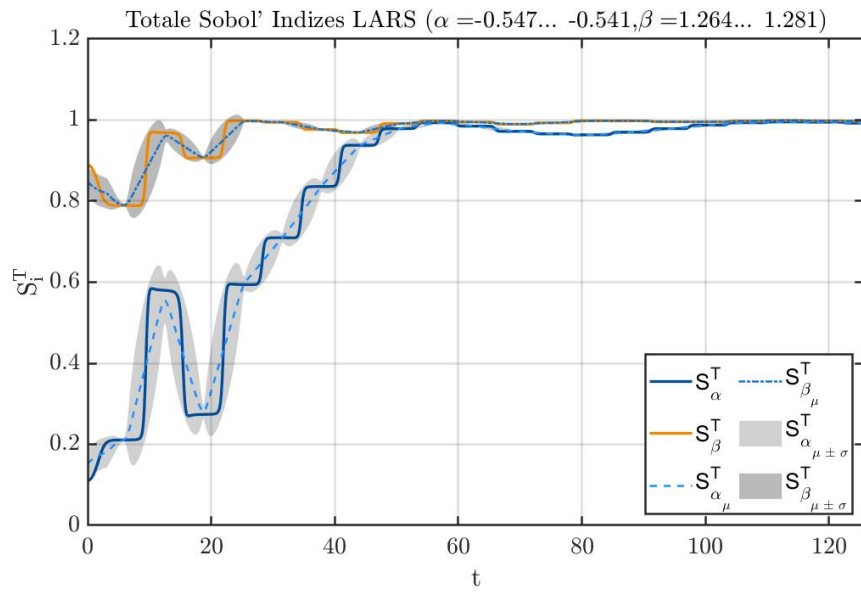
Hierbei sind wieder jeweils die Mittelwerte aller Totalen Sobol' Indizes aus den beiden Berechnungsmethoden über die Zeit dargestellt. Aus diesem Vergleich zeigt sich, dass beide Berechnungsmethoden fast identische Resultate liefern. Die Monte-Carlo-Simulation weist gegen Ende der Zeit eine Schwingung auf, welche sich durch Erhöhung der Sample-Anzahl reduzieren lässt. Durch diese Erhöhung würde allerdings der Rechenaufwand der Berechnung steigen.

Die Resultate der Totalen Sobol' Indizes des dritten Parametersatzes sind in Abbildung 4.10a dargestellt.

Die Berechnung mittels Polynomial Chaos Expansion zeigt ein sehr ähnliches Resultat auf. Dieses ist in Abbildung 4.10b dargestellt.



(a) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 4.10: Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 3

So wird durch einen weiteren kleineren Wert für α der Ausschlag im Einschwingvorgang wieder größer, jedoch bleibt er noch immer kleiner als bei dem ersten Parametersatz. Die Werte für die beiden Sobol' Indizes S_α^T und S_β^T fluktuieren auch bei diesem Parametersatz um eins. Allerdings erreichen Sie diesen Wert bereits nach zirka 50 Sekunden das erste Mal. Das System weist somit einen kürzeren Einschwingvorgang der Indizes auf.

Der Vergleich der Totalen Sobol' Indizes Mittelwerte aus den unterschiedlichen Berechnungsmethoden liefert Abbildung 4.11.

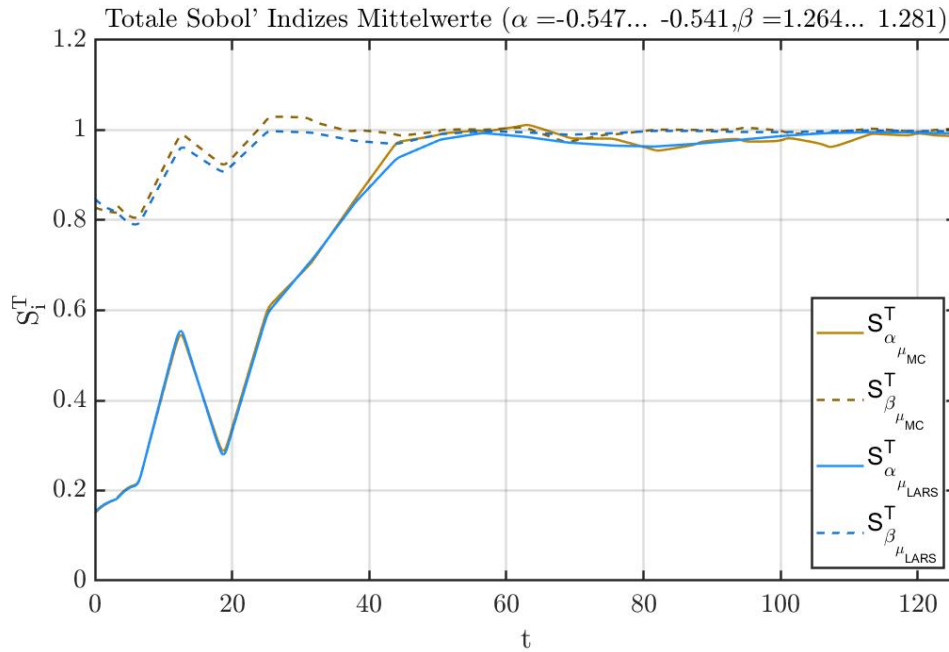


Abbildung 4.11: Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 3 aus den beiden Berechnungsmethoden

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass beide Berechnungen sehr ähnliche Resultate liefern.

Schlussendlich lässt sich sagen, dass die Monte-Carlo- Simulation eine Oberschwingung enthält, die bei der Polynomial Chaos Expansion nicht vorhanden ist. Diese beruht, wie bereits erwähnt, auf der geringen Anzahl an Samples der Berechnung. Alle anderen Eigenschaften der Resultate sind für beide Berechnungsmethoden äquivalent.

Als weitere Untersuchung wird eine detailliertere Berechnung mit dem zweiten Parametersatz durchgeführt. Dabei wird die Anzahl der Samples der Monte-Carlo-Simulation auf zwanzig-tausend erhöht und die Anzahl der Samples für die Metamodell-Berechnung auf zehntausend erhöht. Des Weiteren wurde der Parametersatz 2 leicht modifiziert und als gaußverteilt angenommen. Die Werte inklusive deren Verteilung sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

Tabelle 4.2: Parametersatz 2' der Mathieuschen Differenzialgleichung

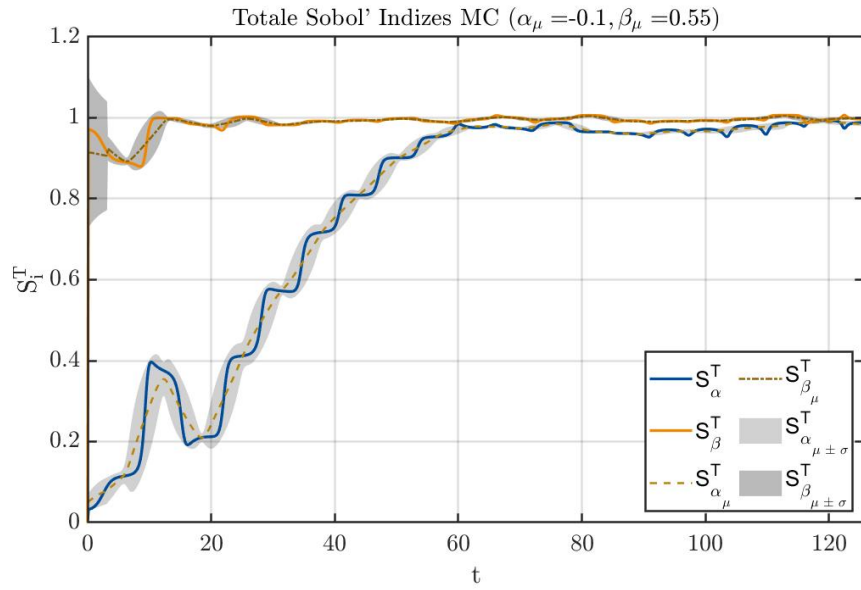
Parametersatz	Parameter	Mittelwert μ	Standardabweichung σ	Einheit
2'	α	-0.1	-0.01	$\frac{1}{s^2}$
2'	β	0.55	0.055	-

Die Resultate der Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation sind in Abbildung 4.12a dargestellt.

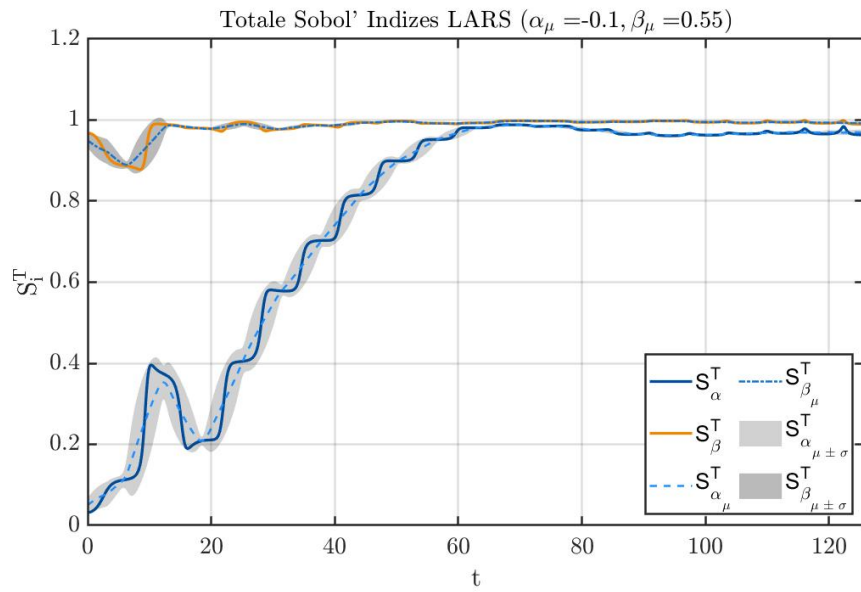
Die Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion ist in Abbildung 4.12b dargestellt.

Einen Vergleich der beiden Berechnungsmethoden liefert Abbildung 4.13. Dabei werden die jeweiligen Mittelwerte der Totalen Sobol' Indizes aus den beiden Berechnungsmethoden abgebildet.

Durch die festgelegte Verteilung können einzelne Werte des Parametersatz außerhalb des stabilen Bereichs liegen. Die Anzahl der instabilen Parameterpaare ist verglichen mit jenen, die ein stabiles Verhalten aufweisen, sehr gering. Anhand der Resultate kann festgestellt werden, dass dies keinen wesentlichen Einfluss auf die Resultate hat. So können bei der Berechnung der Sensitivitätsindizes auch vereinzelte instabile Wertepaare auftreten, die allerdings in der realen Welt nicht angestrebt werden, weil stets ein stabiles Verhalten des Systems erwünscht ist. Abschließend sei angemerkt, dass diese Berechnung um ein Vielfaches länger benötigt als jene mit den in Abschnitt 4.2 beschriebenen Sample-Anzahlen. Außerdem lässt sich nur eine geringe Verbesserung der Resultate erzielen. Die Monte-Carlo-Simulation zeigt eine geringere Schwingfähigkeit am Ende des Zeitverlaufs auf. So muss immer abgewogen werden, ob die zusätzliche benötigte Berechnungszeit, die direkt proportional zu den Kosten ist, das gering verbesserte Resultat wert ist. Dies lässt sich nicht pauschal beantworten, sondern muss für jeden Anwendungsfall selbst entschieden werden.



(a) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation



(b) Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes mittels Polynomial Chaos Expansion

Abbildung 4.12: Zeitverlauf der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2'

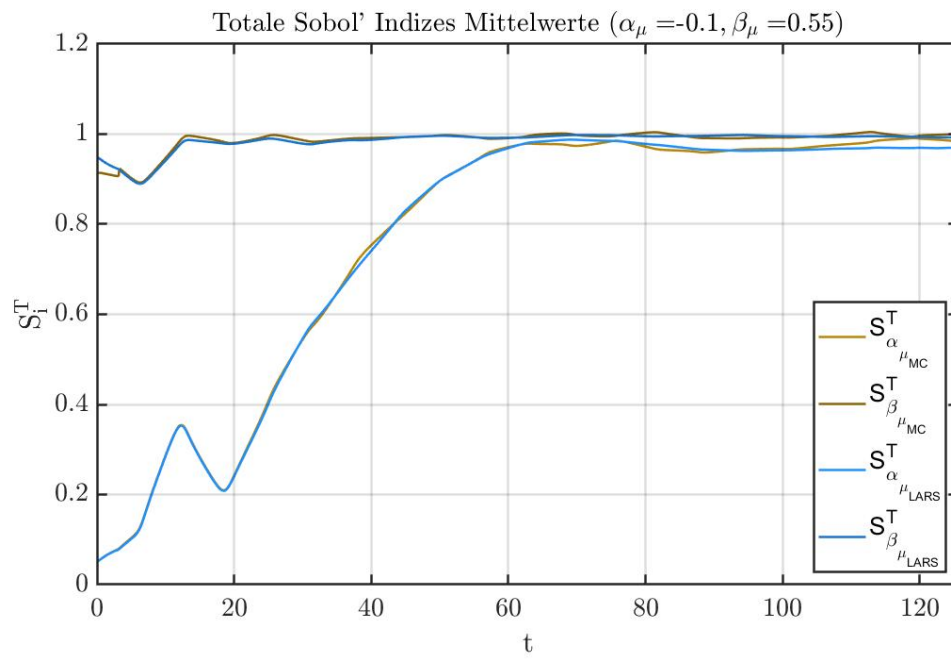


Abbildung 4.13: Vergleich der Totalen Sobol' Indizes des Parametersatzes 2' aus den beiden Berechnungsmethoden mit erhöhter Sample-Anzahl

4.5 Vergleich des Rechenaufwandes der Sensitivitätsindizes der Mathieuschen Differenzialgleichung

Abschließend sei in Tabelle 4.3 ein Vergleich der benötigten Rechenzeit mit den gewählten Simulationsparameter aus Abschnitt 4.3 dargestellt. Diese Daten basieren auf der Berechnung auf demselben Computer und sind daher gut vergleichbar. Daraus ist ersichtlich, dass die gesamte Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation in Summe für das Beispielsystem der Mathieuschen Differenzialgleichung schneller ist. Die Erstellung des Metamodells ist mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Erfolgt die Berechnung der Sobol' Indizes aus diesem Metamodell ist die Berechnung der Sobol' Indizes binnen Sekunden erledigt und somit deutlich schneller als die Berechnung der Sobol' Indizes mittels Monte-Carlo-Simulation. Für dieses Beispiel ist die Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation von Vorteil. Werden jedoch mehrere Berechnungen von einem Metamodell gewünscht oder wurde das Metamodell bereits berechnet, so kann die Berechnung mittels Polynomial Chaos Expansion Zeit sparen. Der Berechnung des Metamodells sollte ausreichend Aufmerksamkeit geschenkt werden, da die Qualität der Resultate stark davon abhängig ist, wie gut das Metamodell das Modell beschreibt.

Tabelle 4.3: Rechenaufwand Mathieuschen Differenzialgleichung

Methode	benötigte Zeit
<i>Monte-Carlo-Simulation:</i>	
Berechnung der Sobol' Indizes	ca. 5 Minuten
<i>Polynomial Chaos Expansion:</i>	
Berechnung der Samples	ca. 24 Sekunden
Erstellung des Metamodells	ca. 326 Minuten
Berechnung der Sobol' Indizes	ca. 0.4 Sekunden

5 Schlussbetrachtung

5.1 Anwendbarkeit der Verfahren

Wie sich in dieser Arbeit zeigt, sind die Methoden, welche für lineare Systeme bereits ausgiebig in der Literatur beschrieben sind, auch für die betrachteten Systeme prinzipiell anwendbar. Jedoch können bei größeren Nichtlinearitäten Probleme auftreten. Dies zeigt sich durch numerisches Driften der Verläufe beziehungsweise durch Auftreten von numerischer Instabilität. Diesem kann zu einem gewissen Grad entgegengewirkt werden. Dadurch kann die Anzahl der Samples erhöht werden oder ein anderes Verfahren zur Berechnung herangezogen werden. Jedoch lässt sich schwer eine Grenze ziehen, wann schlussendlich diese Probleme auftreten. Dies ist schließlich zum einen vom gegebenen System abhängig und zum anderen von den gewählten Einstellungen für die Berechnung. So wird in dieser Arbeit gezeigt, dass die Berechnung der Totalen Sobol' Indizes mittels der Monte-Carlo-Simulation und die Berechnung mittels Polynomial Chaos Expansion sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Somit sind die beschriebenen Berechnungsmethoden für die dargestellten Systeme mit den gewählten Parametern anwendbar. Jedoch ist auf eine ausreichende Anzahl an Samples zu achten und für die Berechnung des Metamodells muss genügend Rechenzeit gegeben sein.

5.2 Zielkonflikt Genauigkeit - Rechenzeit

Die wesentliche Entscheidung, die getroffen werden muss, ist der Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit. Wird eine sehr hohe Genauigkeit benötigt, so kann die Berechnung sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Wird eine Berechnung mittels Polynomial Chaos Expansion gewünscht, so kann ein Input-Output-Model stark von Nutzen sein, um die Rechengenauigkeit zu erhöhen. Durch die ausreichende Rechenzeit für die Erstellung des Metamodells wird nachfolgend sehr viel Rechenaufwand bei der Berechnung der Sensitivitäten erspart. Dies zeigt Abschnitt 3.5 und Abschnitt 4.5. Das entstandene Metamodell kann sehr gut das ursprüngliche Modell abbilden und die anschließenden Berechnungen stark vereinfachen. Die alternative Berechnung mittels Monte-Carlo-Simulation kann bei größeren Systemen sehr aufwendig und kostenintensiv werden.

Literatur

- [1] Shiping Cao u. a. *The Mathieu Differential Equation and Generalizations to Infinite Fractafolds*. 2019. arXiv: 1904.00950 [math.CA].
- [2] SARAH C. COTTER. “A screening design for factorial experiments with interactions”. In: *Biometrika* 66.2 (1979), S. 317–320. DOI: 10.1093/biomet/66.2.317.
- [3] J.R. Dormand und P.J. Prince. “A family of embedded Runge-Kutta formulae”. In: 6.1 (1980), S. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050x(80)90013-3.
- [4] Bertrand Iooss und Paul Lemaître. *A review on global sensitivity analysis methods*. 2014. arXiv: 1404.2405 [math.ST].
- [5] R. Jin, X. Du und W. Chen. “The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty”. In: 25.2 (2003), S. 99–116. DOI: 10.1007/s00158-002-0277-0.
- [6] Ivana Kovacic, Richard Rand und Si Mohamed Sah. “Mathieu's Equation and Its Generalizations: Overview of Stability Charts and Their Features”. In: *Applied Mechanics Reviews* 70.2 (2018). DOI: 10.1115/1.4039144.
- [7] Kurt Magnus, Karl Popp und Walter Sextro. *Schwingungen*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2021. DOI: 10.1007/978-3-658-31116-2.
- [8] S. Marelli, N. Lüthen und B. Sudret. *UQLab user manual – Polynomial chaos expansions*. Techn. Ber. Report # UQLab-V1.4-104. Chair of Risk, Safety und Uncertainty Quantification, ETH Zurich, Switzerland, 2021.
- [9] S. Marelli u. a. *UQLab user manual – Sensitivity analysis*. Techn. Ber. Report # UQLab-V1.4-106. Chair of Risk, Safety und Uncertainty Quantification, ETH Zurich, Switzerland, 2021.
- [10] Stefano Marelli und Bruno Sudret. “UQLab: A Framework for Uncertainty Quantification in Matlab”. In: American Society of Civil Engineers, 2014. DOI: 10.1061/9780784413609.257.
- [11] Max D. Morris. “Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments”. In: 33.2 (1991), S. 161–174. DOI: 10.1080/00401706.1991.10484804.

- [12] Samik Raychaudhuri. “Introduction to Monte Carlo simulation”. In: IEEE, 2008. DOI: 10.1109/WSC.2008.4736059.
- [13] Eduardo Haro Sandoval, Floriane Anstett-Collin und Michel Basset. “Sensitivity study of dynamic systems using polynomial chaos”. In: 104 (2012), S. 15–26. DOI: 10.1016/j.ress.2012.04.001.
- [14] I.M Sobol'. “Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates”. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 55 55.1-3 (2001), S. 271–280. DOI: 10.1016/S0378-4754(00)00270-6.